



**Universidad de Jaén**

Escuela Politécnica Superior de Linares

# **Desarrollo de una interfaz gráfica con fines docentes para ilustrar la propagación de señales en líneas de transmisión**

Autor/a: Manuel Ángel Vega Gómez

Grado:

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Tutor/a:

Manuel Quesada Pérez

Departamento de Física

Fecha: 13/2/2024

Licencia CC



C R E A



# **Desarrollo de una interfaz gráfica con fines docentes para ilustrar la propagación de señales en líneas de transmisión**

**Autor/a: Manuel Ángel Vega Gómez**

**Grado:**

**Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación**

**Tutor/a:**

**Manuel Quesada Pérez**

**Departamento de Física**

**Linares, a 13 de febrero de 2024**

**Firma del/de la autor /a**

**Firma del/de la Tutor/a**

1	RESUMEN.....	7
2	INTRODUCCION .....	8
2.1	CONCEPTOS BÁSICOS Y UNIDADES.....	9
2.2	FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL .....	12
2.2.1	Ley de Gauss para la electricidad: .....	12
2.2.2	Ley de Gauss para el magnetismo: .....	13
2.2.3	Ley de Faraday de inducción electromagnética: .....	13
2.2.4	Ley de Ampère-Maxwell:.....	14
2.3	LAS ECUACIONES FINALES DE MAXWELL EN SU FORMA DIFERENCIAL .....	15
2.4	LAS FORMAS INTEGRALES EQUIVALENTES DE ESTAS ECUACIONES.....	16
2.5	OBTENCIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL .....	17
2.5.1	Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) .....	17
2.5.2	Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) .....	18
2.6	ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA O DE HEAVISIDE.....	20
2.7	ANÁLISIS DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN INFINITA.....	26
2.7.1	Simplificación de las ecuaciones .....	26
2.7.2	Interpretación física.....	27
2.7.3	Constante de Atenuación ( $\alpha$ ).....	29
2.7.4	Constante de Fase ( $\beta$ ).....	29
2.7.5	Diseño de Líneas de Transmisión.....	29
2.7.6	Atenuación de la señal .....	30
2.7.7	Cambio de fase .....	30
2.7.8	Velocidad de fase y longitud de onda.....	31
2.7.9	Potencia en la línea .....	31
2.7.10	Conclusiones para una línea infinita.....	31
2.8	LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN COMO UN SISTEMA LINEAL .....	32
2.8.1	Propiedades de los Sistemas LTI .....	32
2.8.2	Demostración de linealidad:.....	33
2.8.3	Análisis de distorsión .....	34
2.8.4	Método empleado para calcular la solución de las ecuaciones de Heaviside .....	35
2.9	DISCRETIZACIÓN DE LA RESPUESTA AL IMPULSO .....	36
2.10	VERIFICACIÓN DE LA RESPUESTA AL IMPULSO DEL SISTEMA .....	37
2.10.1	Relación de la respuesta al impulso con los Parámetros de la Línea de Pares .....	41
3	OBJETIVOS .....	42
4	MATERIALES Y MÉTODOS .....	43
4.1	ANÁLISIS PREVIO.....	43

4.1.1	Dominio temporal .....	44
4.1.2	Dominio frecuencia .....	45
4.1.2.1	Ejemplo de convolución circular .....	46
4.2	ANÁLISIS TEMPORAL.....	47
4.3	ANÁLISIS FRECUENCIAL.....	48
4.4	DELTA DE DIRAC DESPLAZADA.....	50
4.5	LA TEORÍA DE HEAVISIDE .....	53
4.5.1	La condición de no distorsión .....	54
4.5.2	Nueva constante de propagación .....	57
4.6	ENTORNO DE PROGRAMACIÓN E INTERFACES .....	58
4.6.1	MATLAB .....	58
4.6.2	App Designer .....	58
4.6.3	Como acceder al entorno de App Designer.....	59
4.6.3.1	Conceptos básicos para empezar con App Designer .....	60
4.7	IMPLEMENTACIÓN DE LAS SEÑALES DETERMINISTAS .....	60
4.7.1	Uso de la interfaz y su funcionamiento .....	61
4.7.1.1	Limitaciones en la simulación: frecuencia y duración .....	65
4.8	IMPLEMENTACIÓN DE LAS SEÑALES ALEATORIAS .....	66
4.8.1	Preparación de la señal: .....	66
4.8.2	Aplicación de una ventana: .....	67
4.8.3	Ejemplo práctico.....	69
4.9	USO DE LA INTERFAZ Y SU FUNCIONAMIENTO .....	72
5	RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....	77
5.1	DIFICULTADES ENCONTRADAS .....	78
5.2	POSIBLES MEJORAS.....	78
5.3	LÍNEAS DE FUTURO.....	78
6	ANEXOS.....	79
6.1	ANEXO I : FOURIER .....	79
6.1.1	Generación y Análisis de la Señal .....	80
6.1.2	Impacto de la Ausencia de Simetría en la Transformada de Fourier .....	84
6.1.3	Análisis en el Dominio Espectral: Eliminación y Replicación de Frecuencias Espejo .	89
6.1.4	Análisis en el tiempo y convolución circular.....	91
6.2	ANEXO II: LINEA DE PARES .....	93
6.2.1	Capacitancia (C).....	95
6.2.2	Inductancia (L) .....	95
6.2.3	Conductancia (G) .....	95
6.2.4	Resistencia (R) .....	96

6.2.5	Aplicación práctica.....	97
6.2.6	Conclusiones.....	98
6.4	ANEXO IV: ÍNDICE DE FIGURAS.....	99
6.5	ANEXO IV: ÍNDICE DE TABLAS.....	101
7	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	102

## **1 RESUMEN**

Este Trabajo Fin de Grado presenta el desarrollo de una interfaz gráfica docente para analizar la propagación de señales en líneas de transmisión. Mediante el uso de transformadas de Fourier y técnicas de discretización, se ilustran fenómenos como la atenuación y distorsión, facilitando el entendimiento práctico de conceptos clave en telecomunicaciones.

Implementada en Matlab con App Designer, la herramienta permite trabajar con señales deterministas y aleatorias, ofreciendo un recurso didáctico para visualizar el impacto de los parámetros físicos de las líneas de transmisión.

## 2 INTRODUCCION

En un mundo donde las telecomunicaciones son el pilar de la conectividad global, comprender cómo las señales electromagnéticas viajan a través de medios guiados y libres se vuelve esencial. Las líneas de transmisión, que alguna vez estuvieron reservadas para simples sistemas telefónicos, son ahora las autopistas de las redes de datos, soportando desde llamadas de voz hasta el streaming de video en alta definición. Pero, ¿qué ocurre realmente cuando una señal recorre estas líneas? ¿Cómo afectan la atenuación, la distorsión y otros fenómenos físicos a la calidad de las señales que usamos a diario?

Es innegable el gran avance tecnológico que ha sido la implementación de líneas de transmisión en la vida contemporánea. Sin embargo, en muchos casos resulta un reto el llegar a comprender estas autopistas de datos, sobre todo, intuir qué se va a recibir al final de la línea. Por ello, desde el inicio del proyecto, uno de nuestros principales objetivos ha sido desarrollar una interfaz didáctica capaz de ilustrar qué efectos tienen sobre la propagación de señales electromagnéticas los diferentes parámetros físicos de una línea de transmisión. En la búsqueda de una metodología adecuada para cumplir con este objetivo, se plantearon diversas opciones, incluyendo el uso de métodos numéricos tradicionales y otras técnicas avanzadas de procesamiento de señales. Entre estas opciones, las transformadas de Fourier destacaron como una de las alternativas más atractivas, ya que no solo simplifica el análisis, sino que también permite abordar problemas que antes eran inaccesibles por métodos puramente analíticos. Esta combinación de teoría y simulación busca cerrar la brecha entre la complejidad técnica de las líneas de transmisión y la necesidad de soluciones prácticas en un entorno educativo.

Las transformadas de Fourier ofrecen una ventaja significativa en el procesamiento de señales: la capacidad de descomponer una señal en sus componentes espectrales individuales. Este enfoque permite analizar y tratar cada componente de la señal de manera separada, facilitando así el procesamiento y la modificación de la señal en el dominio de la frecuencia. Posteriormente, se pueden recombinar todas las componentes para obtener la señal modificada en el dominio del tiempo. Esta metodología resulta particularmente apropiada en el contexto de la teoría de las líneas de transmisión: podemos aplicar distintos tratamientos a cada componente frecuencial de la señal, ajustando parámetros específicos y realizando modificaciones que serían complejas de implementar directamente en el dominio del tiempo.



En el transcurso del proyecto, exploraremos cómo explotar esta técnica para desarrollar una interfaz didáctica que no solo supere los inconvenientes iniciales, sino que también demuestre la viabilidad de las transformadas de Fourier en un entorno de procesamiento.

A través de este trabajo, se pretende no solo desentrañar los misterios de la propagación de las señales electromagnéticas, sino también ofrecer un recurso que ayude a otros a profundizar en uno de los campos más fascinantes y fundamentales de la ingeniería de telecomunicaciones

## 2.1 Conceptos básicos y unidades

Antes de empezar a tratar la teoría de las líneas de transmisión viene bien introducir las ecuaciones de Maxwell y algunas de sus aplicaciones en el ámbito de la teoría de circuitos. Dado que, como veremos más tarde, a través de las leyes topológicas de los circuitos y las relaciones constitutivas de cada elemento obtendremos lo que serán las ecuaciones que regirán el comportamiento de las líneas y, por ende, de las señales que enviemos a través de ellas. Para ello necesitamos trazar una especie de puente entre lo que serían las ecuaciones de Maxwell y la teoría de circuitos. Para empezar, desde un punto de vista circuital, las relaciones constitutivas de los elementos con los que vamos a representar una fracción de una línea de transmisión son:


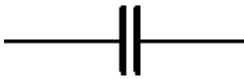

Símbolo	Tipo	Relación constitutiva
	Resistencia	$V = I \cdot R$ *Ley de ohm
	Condensador	$i(t) = i(0) + C \frac{dv(t)}{dt}$
	Inductor	$v(t) = v(0) + L \frac{di(t)}{dt}$

Tabla 2-1

Además, también se tiene las leyes topológicas de los circuitos, en otras palabras, las leyes de Kirchhoff. Estas describen el comportamiento de las leyes de las corrientes de los circuitos.

- Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK): La suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero.

$$\sum I = 0 \quad (1)$$

- Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK): La suma algebraica de las diferencias de potencial alrededor de cualquier malla cerrada es cero.

$$\sum V = 0 \quad (2)$$

Las cuales veremos más tarde cómo se deducen de las ecuaciones de Maxwell. Estas últimas se encargan de describir el campo electromagnético a través de cuatro magnitudes principales:

$E \left( \frac{V}{m} \right)$  Intensidad de campo eléctrico

$H \left( \frac{A}{m} \right)$  Intesidad Magnética<sup>1</sup>

$D \left( \frac{C}{m^2} \right)$  Desplazamiento Eléctrico

$B(T)$  Inducción Magnética

Las constantes más importantes que describen los campos eléctricos y magnéticos:

Cantidad	Símbolo	Valor	Unidades
Permitividad del vacío	$\epsilon_0$	$8.8544 \times 10^{-12}$	$C^2/N \cdot m$
Permeabilidad del vacío	$\mu_0$	$1.2566 \times 10^{-6}$	$m \cdot kg/C^2$

Tabla 2-2

<sup>1</sup> Reitz, J. R., Milford, F. J., Christy, R. W., «Fundamentos de la teoría electromagnética», Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

La permitividad del vacío describe la capacidad del vacío para permitir la formación de campos eléctricos. La permeabilidad del vacío describe la capacidad del vacío para soportar la formación de campos magnéticos. La velocidad de la luz se puede calcular utilizando las constantes electromagnéticas mencionadas anteriormente mediante la siguiente fórmula:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \quad (3)$$

Las principales unidades electromagnéticas vienen dadas según el sistema internacional por:

<i>Cantidad</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Unidad</i>	<i>Abreviación</i>
<i>longitud</i>	l	Metro	m
<i>masa</i>	m	Kilogramo	kg
<i>tiempo</i>	t	Segundo	s
<i>corriente eléctrica</i>	I	Ampere	A
<i>fuerza</i>	F	Newton	N
<i>energía potencial</i>	U	Joule	J
<i>potencia</i>	W	Watt	W
<i>frecuencia</i>	f	Hertz	Hz
<i>longitud de onda</i>	$\lambda$	Metro	m
<i>carga eléctrica</i>	q	Coulomb	C
<i>densidad de carga</i>	P	C/m <sup>3</sup>	C/m <sup>3</sup>
<i>densidad de corriente</i>	J	A/m <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>
<i>potencial escalar</i>	V	Voltio	V
<i>campo eléctrico</i>	E	V/m	V/m
<i>desplazamiento eléctrico</i>	D	C/m <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>
<i>resistencia</i>	R	Ohmio	$\Omega$
<i>Conductividad</i>	$\sigma$	Siemens/Metro	S/m

<i>Capacidad</i>	C	Faradio	F
<i>flujo magnético</i>	Wb	Weber	Wb
<i>inducción magnética</i>	B	Tesla	T=Wb/m <sup>2</sup>
<i>campo magnético</i>	H	A/m	A/m
<i>Inductancia</i>	L	Henrio	H
<i>permeabilidad</i>	μ	H/m	H/m

Tabla 2-3

## 2.2 Formulación de las ecuaciones de Maxwell

Estas leyes, unificadas por Maxwell, proporcionan una descripción completa de los fenómenos electromagnéticos clásicos y son fundamentales para entender cómo se comportan los campos eléctricos y magnéticos en la naturaleza.

### 2.2.1 Ley de Gauss para la electricidad:

Origen: Basada en los trabajos de Charles-Agustín de Coulomb sobre la fuerza entre cargas eléctricas. Partimos de la ley de Coulomb:

$$\vec{F} = k \left( \frac{q_1 q_2}{r^2} \right) \hat{r}, \text{ donde } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (4)$$

El campo eléctrico debido a una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \quad (5)$$

Flujo a través de una superficie esférica:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left( \frac{Kq}{r^2} \right) \hat{r} \cdot r^2 \hat{r} d\Omega = Kq \oint d\Omega = 4\pi Kq = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (6)$$

En la expresión anterior  $d\Omega$  representa el elemento diferencial de ángulo sólido.

Generalizando para cualquier distribución de carga:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Forma diferencial (usando el teorema de la divergencia):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8)$$

### 2.2.2 Ley de Gauss para el magnetismo:

Origen: Basada en observaciones experimentales de que no existen monopolos magnéticos. Flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (9)$$

Forma diferencial (usando el teorema de la divergencia):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

### 2.2.3 Ley de Faraday de inducción electromagnética:

Origen: Basada en los experimentos de Michael Faraday sobre inducción electromagnética. Fuerza electromotriz inducida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (11)$$

En términos del campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (12)$$

Usando el teorema de Stokes:

$$\int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (13)$$

Forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (14)$$

#### 2.2.4 Ley de Ampère-Maxwell:

Origen: Basada en los trabajos de Ampère, modificada por Maxwell para incluir la corriente de desplazamiento. Ley de Ampère original:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (15)$$

Modificación de Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \frac{\varepsilon_0 d\Phi_E}{dt} \right) \quad (16)$$

Usando el teorema de Stokes y la ley de Gauss:

$$\int (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \left( \int \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{\varepsilon_0 d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) \quad (17)$$

Forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (18)$$

Por otro lado, James Clerk Maxwell logró una de las hazañas intelectuales más importantes en la historia de la física al sintetizar las leyes fundamentales del electromagnetismo en un conjunto coherente de ecuaciones. El trabajo de Maxwell allanó el camino para la física moderna y revolucionó la forma en que comprendemos y definimos el universo. Las leyes del electromagnetismo fueron expresadas por Maxwell en términos de los campos vectoriales  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$

Mediante el uso de herramientas de cálculo vectorial, Maxwell obtuvo las formas diferenciales de las ecuaciones. Dichas formas diferenciales ofrecieron una descripción local de los campos electromagnéticos y permitieron un estudio más profundo de su comportamiento en cada punto del espacio. Maxwell también pudo demostrar la coherencia de sus ecuaciones con el principio de conservación de la carga. Esto fue fundamental para confirmar la corrección de sus ecuaciones y para establecer su coherencia con los principios físicos básicos. Otra consecuencia de las ecuaciones de Maxwell fue la predicción de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz. Esta predicción permitió unir la óptica y el electromagnetismo al demostrar que la luz es una forma de radiación electromagnética.

### 2.3 Las ecuaciones finales de Maxwell en su forma diferencial

1. Ley de Gauss para la electricidad:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19)$$

2. Ley de Gauss para el magnetismo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (20)$$

3. Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21)$$

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (22)$$

## 2.4 Las formas integrales equivalentes de estas ecuaciones

1. Ley de Gauss para la electricidad:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \int_V \rho dV \quad (23)$$

2. Ley de Gauss para el magnetismo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (24)$$

3. Ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (25)$$

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (26)$$



## 2.5 Obtención de las leyes de Kirchhoff a partir de las ecuaciones de Maxwell

Las leyes de Kirchhoff son fundamentales en la teoría de circuitos eléctricos y constituyen la base para el análisis y diseño de sistemas eléctricos y electrónicos. Estas leyes, formuladas por Gustav Kirchhoff en 1845, pueden derivarse de las ecuaciones más generales del electromagnetismo: las ecuaciones de Maxwell. Este trabajo presenta una derivación rigurosa de las leyes de Kirchhoff a partir de las ecuaciones de Maxwell, demostrando la conexión profunda entre la teoría electromagnética y la teoría de circuitos. La derivación de las leyes de Kirchhoff a partir de las ecuaciones de Maxwell se realiza mediante un análisis detallado de las condiciones en las que operan los circuitos eléctricos típicos. Se emplean las siguientes aproximaciones y consideraciones:

- Aproximación cuasi estacionaria: Los campos electromagnéticos varían lentamente con el tiempo.
- Circuitos de parámetros concentrados: Las dimensiones del circuito son mucho menores que la longitud de onda de las señales involucradas.
- Corriente de desplazamiento despreciable: En circuitos de baja frecuencia, el término  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  en la Ley de Ampère-Maxwell es insignificante.
- Es importante notar que estas aproximaciones limitan la aplicabilidad de las leyes de Kirchhoff en situaciones de alta frecuencia o en circuitos de grandes dimensiones.

### 2.5.1 Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

La LCK se deriva de la ley de Gauss para la electricidad:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (27)$$

Tomamos la divergencia de la Ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{d}{dt} \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad (28)$$

Teniendo en cuenta la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

Integrando sobre un volumen que encierra un nodo:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV + \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (30)$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (31)$$

En estado estacionario, el segundo término es cero:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (32)$$

Esta integral de superficie se traduce en la suma de corrientes

$$\Sigma I = 0 \quad (33)$$

### 2.5.2 Ley de Voltajes de Kirchoff (LVK)

La LVK se deriva directamente de la Ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (34)$$

En condiciones cuasi estacionarias, el flujo magnético es aproximadamente constante:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} \approx 0 \quad (35)$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (36)$$

El campo eléctrico se relaciona con el potencial eléctrico:

$$E = -\vec{\nabla}V \quad (37)$$

Sustituyendo en la integral de línea:

$$-\oint_C \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = 0 \quad (38)$$

Esta integral representa la suma de las diferencias de potencial alrededor de un lazo cerrado:

$$\Sigma V = 0 \quad (39)$$

Las leyes de Kirchhoff son válidas bajo las hipótesis de parámetros concentrados y estados estacionarios o cuasi estacionario. Sin embargo, estas leyes no se pueden aplicar bajo las siguientes circunstancias:

- **Circuitos de alta frecuencia:** Cuando las frecuencias son muy altas, el modelo de elemento fijo ya no es aplicable debido a efectos capacitivos e inductivos distribuidos.
- **Presencia de campos magnéticos variables:** La ley de voltajes de Kirchhoff no es válida cuando hay campos magnéticos fluctuantes que vinculan el bucle cerrado, ya que se pueden inducir campos eléctricos y producirse fuerzas electromotrices.
- **Circuitos con elementos distribuidos:** Cuando los efectos de los campos electromagnéticos no se pueden confinar a componentes individuales. En ese caso, las leyes de Kirchhoff se pueden aplicar a elementos infinitesimales.
- **Sistemas con carga no constante:** La ley de corrientes de Kirchhoff no se aplica cuando la carga neta en cables, uniones o componentes no es constante.
- **Circuitos con acoplamiento capacitivo significativo:** Cuando el campo eléctrico entre las partes del circuito no es despreciable

## 2.6 Ecuaciones del telegrafista o de Heaviside

En las líneas de transmisión resulta más sencillo utilizar un modelo circuital en vez de resolver las ecuaciones de Maxwell. Este modelo viene descrito en términos de la resistencia, conductancia, capacitancia e inductancia por unidad de longitud de la línea. De manera que entramos en lo que sería el análisis de los circuitos distribuidos de líneas de transmisión, el cual se deriva de ir aplicando las leyes topológicas de los circuitos además de las relaciones de cada elemento del sistema. En Teoría de Circuitos hemos analizado circuitos con dimensiones pequeñas en comparación con la longitud de onda de la señal que se transmite. En ese caso, los componentes del circuito eran representados por elementos concentrados en un punto específico del circuito, como resistencias, inductores y condensadores. Representamos el comportamiento eléctrico de la línea de transmisión mediante cuatro coeficientes de los elementos distribuidos, cuyos valores son constantes por unidad de longitud. Estos coeficientes son:

- Resistencia ( $R$ ) e inductancia ( $L$ ), que son elementos en serie a lo largo de la línea.
- Capacitancia ( $C$ ) y conductancia ( $G$ ), que son elementos en paralelo a lo largo de la línea.

En esta sección se utiliza un modelo circuital para obtener las ecuaciones que rigen las líneas de transmisión uniformes de dos conductores. Como se ha mencionado anteriormente, estas líneas difieren de las redes eléctricas comunes en un aspecto fundamental: mientras que las dimensiones físicas de las redes eléctricas ordinarias son mucho más pequeñas que la longitud de onda que se propaga, las líneas de transmisión suelen tener una longitud considerable, que puede ser una fracción significativa o incluso múltiples longitudes de onda. En una línea de transmisión es una red con parámetros distribuidos, lo que requiere describirla con parámetros de circuito distribuidos a lo largo de su longitud. Sin embargo, hay que tener en cuenta dos parámetros importantes. Uno de ellos es clave a la hora de modelar y analizar líneas de transmisión, se trata de la velocidad de propagación de la línea y esta velocidad depende de las características físicas del medio de transmisión, como su constante dieléctrica y la constante de propagación de la línea, entre otros parámetros.

En medios típicos de transmisión de voz, como cables de par trenzado, la velocidad de propagación es una fracción constante de la velocidad de la luz en el vacío, lo cual nos da

una visión más simplificada de esta característica. Además de la velocidad de propagación, el espectro de la señal que se transmite es otro parámetro fundamental en el diseño de la línea de transmisión. En concreto al transmitir señales en banda de base, en nuestro caso transmitiremos señales de voz, por lo que estaremos un ancho de banda de 4 kHz. Todo ello nos deja una longitud de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (40)$$

En resumen, para la transmisión de señales en banda base en medios donde la velocidad de propagación es tan elevada y su frecuencia es tan baja, trabajar con el uso de la teoría de microondas, que abarca frecuencias en el rango de los gigahercios (GHz), resulta innecesario.

En base a todo esto, de ahora en adelante nos centraremos en analizar sencillamente la línea de transmisión, usando la teoría clásica. Para analizar una línea de transmisión, como hemos comentado anteriormente, se considera un segmento muy pequeño de línea donde tenemos los elementos distribuidos. El diferencial de longitud  $\Delta z$ , viene descrito por los siguientes parámetros:

- $R \Delta z$ , la resistencia por unidad de longitud, medida en  $\Omega$ .
- $L \Delta z$ , la inductancia por unidad de longitud, medida en H.
- $G \Delta z$ , la conductancia por unidad de longitud, medida en S.
- $C \Delta z$ , la capacitancia por unidad de longitud, medida en F.

En las líneas tenemos los 4 elementos dispuestos en serie y paralelo, además nótese que la estructura de las líneas de transmisión se caracteriza por la disposición de los cuatro elementos distribuidos a lo largo de la línea. Estos elementos se organizan de manera específica, formando una configuración en serie y paralelo. En detalle, la resistencia por unidad de longitud ( $R$ ) se encuentra en serie con la inductancia por unidad de longitud ( $L$ ). Esta combinación en serie representa las propiedades longitudinales de la línea, afectando principalmente a la propagación de la corriente.

Por otro lado, la conductancia por unidad de longitud ( $G$ ) se dispone en paralelo con la capacitancia por unidad de longitud ( $C$ ). Esta configuración en paralelo modela las características transversales de la línea, influyendo principalmente en el comportamiento del voltaje entre los conductores.

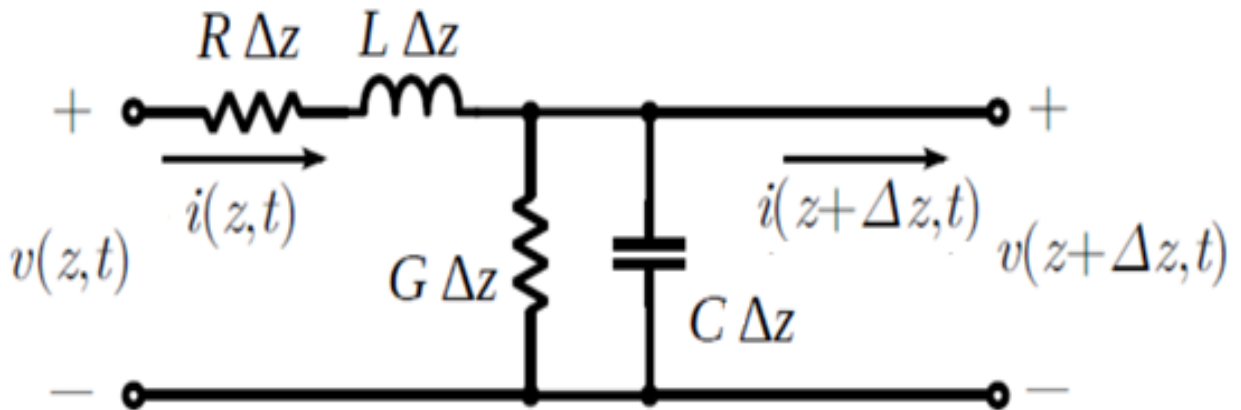


Figura 2-1: Modelo de línea de transmisión de circuito equivalente de elementos distribuido a lo largo de la línea. Donde  $R\Delta z$  es la resistencia del elemento de longitud  $\Delta z$ ,  $L\Delta z$  es la inductancia,  $G\Delta z$  es la conductancia y  $C\Delta z$  es la capacitancia<sup>2</sup>

Donde  $V(z,t)$  y  $V(z+\Delta z,t)$  representan los voltajes instantáneos en  $z$  y  $z+\Delta z$ , respectivamente, y análogamente para  $I(z,t)$  e  $I(z+\Delta z,t)$ . Si aplicamos las Leyes de Kirchoff a este circuito:

$$V(z + \Delta z, t) = V(z, t) - \left( RI(z, t) + L \frac{\partial I}{\partial t} \right) \Delta z \Rightarrow \quad (41)$$

$$\Delta V = - \left( RI(z, t) + L \frac{\partial I}{\partial t} \right) \Delta z \quad (42)$$

<sup>2</sup> «Telegrapher's Equations - Electrical Engineering Textbooks».

Una vez obtenemos la ecuación por las leyes de Kirchoff de los voltajes, pasamos aplicar las leyes de Kirchoff de las corrientes.

$$I(z + \Delta z, t) = I(z, t) - \left( GV(z, t) + C \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta z \Rightarrow \quad (43)$$

$$\Delta I = - \left( GV(z, t) + C \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta z \quad (44)$$

Dado que trabajamos con trozos de línea infinitesimales, debemos de considerar que la longitud de la porción de nuestro circuito que modela la línea de transmisión,  $\Delta z$ , tiende a 0. En el límite de  $\Delta z \rightarrow 0$ , estas ecuaciones se pueden expresar de forma diferencial:

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (45)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = GV + C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (46)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones generales de la línea de transmisión. También son conocidas como ecuaciones del telegrafista en honor a Oliver Heaviside, que las dedujo por primera vez en 1887. Teniendo en cuenta que vamos a trabajar en el dominio de la frecuencia, podemos aplicar Fourier y empezar a trabajar con fasores, nos quedamos en el dominio fasorial, solo en el segundo término:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - j\omega L I \quad (47)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GV - j\omega C V \quad (48)$$

Para obtener ecuaciones diferenciales de segundo orden, derivamos la primera ecuación respecto a  $z$  y sustituimos la segunda en ella:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right) - j\omega L \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R(-GV - j\omega VC) - j\omega L(-GV - j\omega VC) \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (RG + j\omega RC + j\omega LG - \omega^2 LC)V \quad (51)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]V \quad (52)$$

Definimos la constante de propagación  $\gamma$  como:

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (53)$$

Por lo tanto, la ecuación para el voltaje se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \gamma^2 V \quad (54)$$

De manera similar, podemos derivar la ecuación para la corriente:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \gamma^2 I \quad (55)$$

Las soluciones generales para estas ecuaciones diferenciales de segundo orden son:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (56)$$

$$I(z) = I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{\gamma z} \quad (57)$$

Donde  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $I^+$ , e  $I^-$  son constantes que dependen de las condiciones de contorno.  $V^+$  e  $I^+$  representan amplitudes de la onda que viaja en la dirección  $+z$ , y  $V^-$  e  $I^-$  representan amplitudes de la onda que viaja en la dirección  $-z$ .



- El término  $e^{-\gamma z}$  representa una onda que se propaga en la dirección  $+z$ .
- El término  $e^{\gamma z}$  representa una onda que se propaga en la dirección  $-z$ .

Podemos relacionar las constantes de voltaje y corriente utilizando las ecuaciones originales:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - j\omega IL = -(R + j\omega L)I \quad (58)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GV - j\omega VC = -(G + j\omega C)V \quad (59)$$

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial I}{\partial z}} = \frac{-(R + j\omega L)I}{-(G + j\omega C)V} = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)} \quad (60)$$

$$Z_0 = \frac{-(R + j\omega L)I}{-(G + j\omega C)V} = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)} \quad (61)$$

De tal modo que podemos obtener la impedancia característica de la línea.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (62)$$

Finalmente, podemos escribir las soluciones como:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \quad (63)$$

$$I(z) = \left(\frac{V^+}{Z_0}\right) e^{-\gamma z} - \left(\frac{V^-}{Z_0}\right) e^{\gamma z} \quad (64)$$

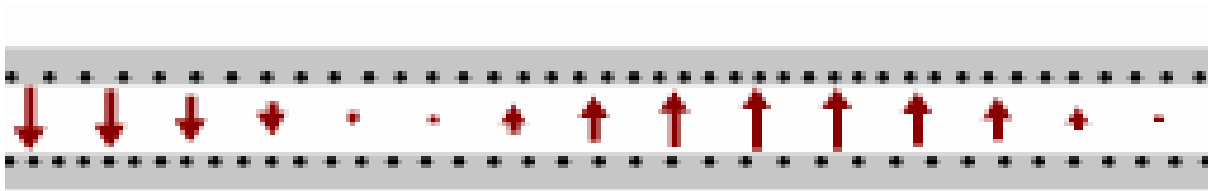


Figura 2-2: Línea de transmisión acabada en abierto, donde los puntos negros representan cargas eléctricas, mientras que las flechas indican la dirección y magnitud del campo eléctrico. <sup>3</sup>

De esta manera se puede ver en la figura superior cómo el campo va cambiando a lo largo de una línea de transmisión y no se mantiene constante en todos sus puntos. En el contexto de una línea infinita en el espacio, el concepto de onda reflejada pierde su relevancia. De hecho, incluir un término de onda reflejada carecería de sentido físico. Esto se debe a que, en una línea infinita, una onda reflejada desde el infinito estaría completamente atenuada al llegar al origen. Para que existiera una reflexión en el infinito, la amplitud de la onda en ese punto tendría que ser infinita, lo cual es físicamente imposible. Por lo tanto, en nuestro modelo de línea infinita, no consideramos el componente de onda reflejada

## 2.7 Análisis de una línea de transmisión infinita

Como se ha mencionado previamente, en el caso de una línea infinita podemos simplificar significativamente nuestras ecuaciones, ya que no habrá reflexiones de onda. Esto se debe a que no existe un extremo final donde la onda pueda reflejarse.

### 2.7.1 Simplificación de las ecuaciones

Para una línea infinita, solo consideramos la onda que se propaga en la dirección positiva de  $z$ . Por lo tanto, las soluciones para la tensión y la intensidad se simplifican a:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} \quad (65)$$

$$I(z) = \left( \frac{V^+}{Z_0} \right) e^{-\gamma z} \quad (66)$$

- $V^+$  es la amplitud de la onda de voltaje en el origen ( $z = 0$ )
- $Z_0$  es la impedancia característica de la línea
- $\gamma = \alpha + j\beta$  es la constante de propagación compleja

<sup>3</sup> «Transmission Line».

### 2.7.2 Interpretación física

La constante de propagación es un parámetro fundamental en el estudio y diseño de líneas de transmisión, guías de onda y otros sistemas de comunicación. Este parámetro complejo, denotado comúnmente por  $\gamma$ , describe cómo las ondas electromagnéticas se propagan a lo largo de una línea de transmisión, teniendo en cuenta tanto la atenuación de la señal como los cambios de fase que experimenta. La constante de propagación  $\gamma$  se define como un número complejo:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (67)$$

- $\alpha$  es la constante de atenuación (parte real), medida en Nepers por metro (Np/m)
- $\beta$  es la constante de fase (parte imaginaria), medida en radianes por metro (rad/m)
- $j$  es la unidad imaginaria

Esta definición nos permite describir dos aspectos fundamentales de la propagación de ondas:

- La atenuación de la amplitud de la onda a medida que se propaga (representada por  $\alpha$ )
- El cambio de fase de la onda por unidad de longitud (representado por  $\beta$ )

Expandamos la ecuación característica para una línea descrita por los cuatro parámetros de las ecuaciones del telegrafista:

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (68)$$

$$= RG + jR\omega C + j\omega LG - \omega^2 LC \quad (69)$$

$$= (RG - \omega^2 LC) + j(R\omega C + \omega LG) \quad (70)$$

Identificamos la parte real e imaginaria de  $\gamma^2$ :

$$Re(\gamma^2) = RG - \omega^2 LC \quad (71)$$

$$Im(\gamma^2) = R\omega C + \omega LG \quad (72)$$

Para obtener expresiones para  $\alpha$  y  $\beta$ , utilizamos las siguientes relaciones:

$$\alpha = \sqrt{\left[ \frac{|\gamma^2| + Re(\gamma^2)}{2} \right]} \quad (73)$$

$$\beta = \sqrt{\left[ \frac{|\gamma^2| - Re(\gamma^2)}{2} \right]} \quad (74)$$

Donde  $|\gamma^2|$  es el módulo de  $\gamma^2$ :

$$|\gamma^2| = \sqrt{[(Re(\gamma^2))^2 + (Im(\gamma^2))^2]} \quad (75)$$

$$= \sqrt{[(RG - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C + \omega LG)^2]} \quad (76)$$

Sustituyendo y simplificando, llegamos a las expresiones finales para  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha = \sqrt{\left[ \frac{\sqrt{[(RG - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C + \omega LG)^2]} + (RG - \omega^2 LC)}{2} \right]} \quad (77)$$

$$\beta = \sqrt{\left[ \frac{\sqrt{[(RG - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C + \omega LG)^2]} - (RG - \omega^2 LC)}{2} \right]} \quad (78)$$

### 2.7.3 Constante de Atenuación ( $\alpha$ )

La constante de atenuación  $\alpha$  se relaciona con la disminución de la amplitud de la onda por unidad de longitud. En términos matemáticos, para una onda que se propaga en la dirección  $+z$ , la amplitud  $A(z)$  a una distancia  $z$  está dada por:

$$A(z) = A_0 e^{-\alpha z} \quad (79)$$

Donde  $A_0$  es la amplitud inicial. La unidad de  $\alpha$  es Nepers por metro (Np/m), aunque a menudo se convierte a decibeles por metro (dB/m) para aplicaciones prácticas. Donde cabe resaltar que en la ecuación 80, estamos referidos a dB de potencia. En cambio, si se tratasen de amplitud, el factor de conversión sería la mitad.

$$\alpha \left( \frac{dB}{m} \right) = 8.686 \times \alpha \left( \frac{Np}{m} \right) \quad (80)$$

### 2.7.4 Constante de Fase ( $\beta$ )

La constante de fase  $\beta$  indica el cambio de fase por unidad de longitud. Está relacionada con la longitud de onda en la línea ( $\lambda$ ) de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (81)$$

### 2.7.5 Diseño de Líneas de Transmisión

El conocimiento detallado de la constante de propagación es crucial para el diseño de líneas de transmisión. En particular, se usa para:

- Calcular la atenuación esperada en una línea de longitud dada
- Determinar la longitud máxima de una línea para una atenuación aceptable
- Diseñar sistemas para contrarrestar los efectos de la atenuación y dispersión

Para un estudio más exhaustivo de estos aspectos, así como un análisis de los efectos de la compensación mediante bobinas de Pupin, se recomienda consultar el ANEXO II. Este documento proporciona información como calcular los parámetros de una línea de pares.

### 2.7.6 Atenuación de la señal

En términos fasoriales, la magnitud (módulo) del voltaje y la corriente disminuyen exponencialmente con la distancia:

$$|V(z)| = |V^+|e^{-\alpha z} \quad (82)$$

$$|I(z)| = \left( \frac{|V^+|}{|Z_0|} \right) e^{-\alpha z} \quad (83)$$

- $|V(z)|$  representa la magnitud del voltaje a una distancia  $z$  de la fuente
- $|I(z)|$  representa la magnitud de la corriente a una distancia  $z$  de la fuente
- $|V^+|$  es la magnitud del voltaje de la onda incidente en el origen ( $z = 0$ )
- $\alpha$  es la constante de atenuación, medida en Nepers por metro (Np/m)
- $z$  es la distancia a lo largo de la línea de transmisión, medida en metros
- $|Z_0|$  es la magnitud de la impedancia característica de la línea

### 2.7.7 Cambio de fase

La fase de la señal cambia linealmente con la distancia:

$$\angle V(z) = \angle V^+ - \beta z \quad (84)$$

$$\angle I(z) = \angle V^+ - \angle Z_0 - \beta z \quad (85)$$

La fase del voltaje disminuye linealmente con la distancia, siendo  $\beta z$  el término que representa el cambio acumulado de fase debido a la propagación. En el caso de la corriente, el cambio de fase incluye un término adicional  $-\angle Z_0$  que depende del ángulo de fase de la impedancia característica

### 2.7.8 Velocidad de fase y longitud de onda

La velocidad de fase ( $v_f$ ) y la longitud de onda ( $\lambda$ ) en la línea se relacionan con  $\beta$ :

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (86)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (87)$$

La dependencia de  $\beta$  con la frecuencia puede llevar a efectos de dispersión, donde diferentes componentes de frecuencia de una señal viajan a diferentes velocidades.

### 2.7.9 Potencia en la línea

La potencia que fluye a lo largo de la línea disminuye con la distancia debido a las pérdidas:

$$P(z) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{Re}[V(z) * I(z)] = \left(\frac{|V^+|^2}{2|Z^0|}\right) e^{-2\alpha z} \quad (88)$$

### 2.7.10 Conclusiones para una línea infinita

No hay onda reflejada, simplificando significativamente el análisis. La impedancia es constante a lo largo de toda la línea e igual a  $Z_0$ . La señal se atenúa exponencialmente con la distancia (excepto en el caso ideal sin pérdidas).

La fase de la señal cambia linealmente con la distancia. Este modelo es útil para aproximar líneas muy largas o para analizar la propagación inicial en sistemas de comunicación de largo alcance.

Este análisis de una línea infinita nos permite centrarnos en los efectos puros de propagación, sin las complicaciones de las reflexiones, proporcionando una base teórica sólida para entender la transmisión de señales en sistemas de comunicación de larga distancia.

## 2.8 La línea de transmisión como un sistema lineal

Vamos a explicar cómo podemos modelar una línea de transmisión como un sistema lineal, demostrarlo, y mostrar cómo esto nos permite trabajar en el dominio de la frecuencia. Comenzaremos desde el punto donde se obtiene la constante de atenuación.

Recordemos que la constante de propagación  $\gamma$  se define como:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (89)$$

Para demostrar que una línea de transmisión puede modelarse como un sistema lineal, debemos probar que las ecuaciones de nuestro sistema de transmisión cumplen con los principios de superposición y homogeneidad. Las ecuaciones de la línea de transmisión:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(R + j\omega L)I \quad (90)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(G + j\omega Y)V \quad (91)$$

### 2.8.1 Propiedades de los Sistemas LTI

Los sistemas LTI (*Linear Time-Invariant Systems* o Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo) poseen dos propiedades fundamentales que son cruciales para entender la importancia de la respuesta al impulso:

- **Linealidad:** La respuesta del sistema a una combinación lineal de entradas es igual a la combinación lineal de las respuestas a cada entrada individual.
- **Invariancia temporal:** Un desplazamiento temporal en la entrada resulta en el mismo desplazamiento temporal en la salida.

Estas propiedades permiten caracterizar completamente un sistema LTI mediante su respuesta al impulso.



### 2.8.2 Demostración de linealidad:

Superposición: Si  $V_1, I_1$  y  $V_2, I_2$  son dos soluciones diferentes, entonces:

$$\frac{\partial(V_1 + V_2)}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} = -(R + j\omega L)(I_1 + I_2) \quad (92)$$

$$\frac{\partial(I_1 + I_2)}{\partial z} = \frac{\partial I_1}{\partial z} + \frac{\partial I_2}{\partial z} = -(G + j\omega Y)(V_1 + V_2) \quad (93)$$

Homogeneidad: Si multiplicamos una solución  $(V, I)$  por una constante  $k$ :

$$\frac{\partial(kV)}{\partial z} = \frac{k\partial V}{\partial z} = -k(R + j\omega L)I = -(R + j\omega L)(kI) \quad (94)$$

$$\frac{\partial(kI)}{\partial z} = \frac{k\partial I}{\partial z} = -k(G + j\omega Y)V = -(G + j\omega Y)(kV) \quad (95)$$

Invariante en tiempo: Invariancia en el tiempo: Para demostrar esta propiedad, se llevará a cabo una simulación numérica en los apartados posteriores utilizando una delta de Dirac. A través de estas simulaciones, se mostrará cómo el sistema se comporta como un sistema LTI, manteniendo la invariancia temporal.

Tras esto damos por supuesto que la línea de transmisión es un sistema lineal. Podemos definir una función de transferencia  $H(\omega)$  que relaciona la tensión (o corriente) en cualquier punto  $z$  con la tensión (o corriente) en  $z=0$ :

$$H(\omega) = \frac{V(z, \omega)}{V(0, \omega)} = e^{-\gamma z} \quad (96)$$

Esta función de transferencia nos permite analizar la respuesta en frecuencia de la línea:

- $|H(\omega)| = \exp(-\alpha z)$  nos da la atenuación en función de la frecuencia
- $\angle H(\omega) = -\beta z$  nos da el desfase en función de la frecuencia

### 2.8.3 *Análisis de distorsión*

La linealidad del sistema nos permite descomponer una señal compleja en sus componentes de frecuencia y analizar cómo cada componente se propaga por la línea. Esto es crucial para estudiar fenómenos como la distorsión. La distorsión ocurre cuando diferentes componentes espectrales (componentes de diferentes frecuencias) se ven afectadas de manera desigual al propagarse por la línea. Esto puede manifestarse en tres formas principales:

- **Distorsión de Amplitud:** Ocurre cuando la constante de atenuación  $\alpha$  varía con la frecuencia. Esto provoca que las componentes espectrales altas o bajas se atenúen más que otras, alterando la forma original de la señal.
- **Distorsión de Fase:** Se produce si la constante de fase  $\beta$  no es lineal con respecto a la frecuencia. Esto genera un desfase desigual entre las diferentes frecuencias, lo que puede causar una dispersión temporal en señales moduladas o pulsos digitales.
- **Dispersión:** La dispersión ocurre cuando diferentes frecuencias viajan a distintas velocidades debido a una dependencia no lineal del parámetro  $v_f = \omega/\beta$ , conocido como velocidad de fase. Este efecto puede ensanchar pulsos y provocar interferencia Inter simbólica (ISI) en sistemas digitales.

En el caso específico de la transmisión de voz, las perturbaciones pueden manifestarse de las siguientes maneras:

- **Atenuación:** La señal de voz pierde intensidad a medida que se propaga por el medio de transmisión, lo que puede resultar en una disminución del volumen percibido.
- **Distorsión:** La voz puede sufrir alteraciones en su forma de onda debido a la respuesta en frecuencia no uniforme del canal de transmisión. Esto puede afectar la claridad y la inteligibilidad del habla.
- **Ancho de banda limitado:** La restricción del ancho de banda del canal puede afectar la calidad de la voz transmitida, potencialmente eliminando algunas frecuencias importantes para la naturalidad del habla.

Estas perturbaciones pueden resultar en una degradación de la calidad de la voz transmitida, afectando su claridad, volumen y fidelidad en comparación con la señal original.

#### 2.8.4 Método empleado para calcular la solución de las ecuaciones de Heaviside

Habiendo demostrado el carácter lineal del modelo de línea de transmisión empleado, el procedimiento que se empleará en este TFG para calcular la respuesta  $y(t)$  de dicha línea (la señal que se tiene tras haber recorrido cierta distancia  $z$ ) a una señal de entrada  $x(t)$  se basa en la función de transferencia,  $H(\omega)$ . En particular, nuestro método se basa en que, en el dominio de la frecuencia, se satisface que:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (97)$$

- $Y(\omega)$  es la transformada de Fourier de la salida.
- $X(\omega)$  es la transformada de Fourier de la entrada.
- Esquemáticamente, esto puede representarse así:

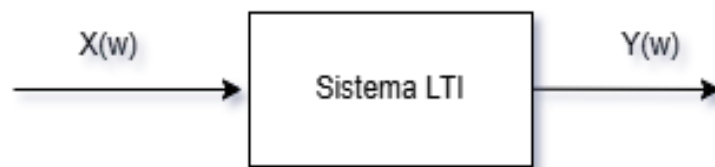


Figura 2-3: Representación esquemática del funcionamiento de un sistema LTI en el dominio de la frecuencia <sup>4</sup>

En el dominio del tiempo la expresión anterior puede expresarse en términos de un producto de convolución:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (98)$$

Donde  $h(t)$  es la transformada de Fourier inversa de la función de transferencia. Esquemáticamente se representa así:



Figura 2-4 : Representación esquemática del funcionamiento de un sistema LTI en el dominio del tiempo.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> «Creación propia- ProfiCAD-dibujar esquemas eléctricos».

<sup>5</sup> «Creación propia- ProfiCAD-dibujar esquemas eléctricos».

Cuando aplicamos una entrada impulso  $\delta(t)$  al sistema, la salida correspondiente es la respuesta al impulso  $h(t)$ :

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t) \quad (99)$$

Esquemáticamente:

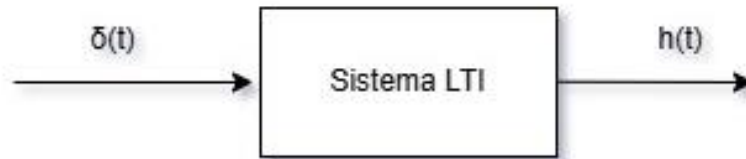


Figura 2-5: La función  $h(t)$  es la respuesta de un sistema LTI a una función impulso unitario (delta de Dirac).<sup>6</sup>

## 2.9 Discretización de la respuesta al impulso

Para discretizar la respuesta al impulso, muestreamos  $h(t)$  a intervalos regulares  $T_s$  (período de muestreo):

$$h[n] = h(nT_s) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (100)$$

La elección de  $T_s$  es crucial y debe cumplir con el teorema de Nyquist:

$$f_s > 2 f_{max} \quad (101)$$

Donde  $f_s = \frac{1}{T_s}$  es la frecuencia de muestreo y  $f_{max}$  es la frecuencia máxima significativa en la señal. En la práctica, necesitamos truncar  $h[n]$  a un número finito de muestras  $N$ . Esto introduce una aproximación:

$$h[n] = 0 \text{ para } n \geq N \quad (102)$$

<sup>6</sup> «Creación propia- ProfiCAD-dibujar esquemas eléctricos».

La elección de  $N$  depende de la precisión requerida y de la duración efectiva de la respuesta al impulso. Con la respuesta al impulso discretizada, podemos modelar la línea como un sistema de respuesta al impulso finita (FIR):

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \quad (103)$$

Donde  $x[n]$  es la señal de entrada e  $y[n]$  es la señal de salida. Alternativamente, podemos implementar el modelo en el dominio de la frecuencia:

$$Y[k] = H[k] \cdot X[k] \quad (104)$$

Donde  $X[k]$ ,  $Y[k]$ , y  $H[k]$  son las DFT de  $x[n]$ ,  $y[n]$ , y  $h[n]$  respectivamente. La discretización de la respuesta al impulso nos permite modelar una línea de transmisión en el dominio digital, facilitando su implementación en sistemas de procesamiento de señales digitales y simulaciones por computadora. Este enfoque es fundamental en el diseño y análisis de sistemas de comunicación modernos, donde la mayoría del procesamiento se realiza en el dominio digital.

## 2.10 Verificación de la respuesta al impulso del sistema

La verificación de la respuesta al impulso es crucial para validar el modelo discreto de nuestra línea de transmisión. Este proceso nos permite confirmar que el sistema se comporta según lo esperado y que nuestra discretización es adecuada. Como se demostró anteriormente, la respuesta al impulso  $h(t)$  es la salida del sistema cuando la entrada es una función delta de Dirac  $\delta(t)$ . De este modo, podemos obtener la respuesta al impulso de nuestro sistema continuo aplicando una delta de Dirac como entrada:

$$x(t) = \delta(t) \quad (105)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t) \quad (106)$$

$$y(t) = h(t) \quad (107)$$

Además de esta validación básica, otra prueba particularmente útil consiste en introducir una delta de Dirac desplazada en el tiempo como entrada al sistema:

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad (108)$$

Al aplicar esta entrada a nuestro sistema continuo, esperamos obtener a la salida la respuesta al impulso  $h(t)$  desplazada por la misma cantidad  $t_0$ :

$$y(t) = h(t - t_0) \quad (109)$$

Este resultado se debe a la propiedad de desplazamiento temporal de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Matemáticamente, esto se expresa como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0) \quad (110)$$

Donde  $*$  denota la operación de convolución

Para simular este comportamiento en un entorno digital, necesitamos discretizar nuestro sistema. En el dominio discreto, trabajaremos con secuencias de la siguiente manera:

La delta de Dirac discreta (delta de Kronecker):

$$x[n] = \delta[n] \quad (111)$$

La delta de Dirac desplazada:

$$x[n] = \delta[n - n_0] \quad (112)$$

-  $n_0$  es el desplazamiento en muestras.

De manera análoga, lo que tenemos es:

$$y[n] = h[n - n_0] \quad (113)$$

La convolución discreta:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \delta[n - n_0] * h[n] = h[n - n_0] \quad (114)$$

En la implementación digital utilizaremos estas formas discretas para simular el comportamiento del sistema continuo. La elección adecuada de la frecuencia de muestreo y el número de muestras será crucial para representar con precisión el sistema continuo en el dominio digital. Como se ha comentado previamente, la función de transferencia  $H(\omega)$  es una representación en el dominio de la frecuencia del comportamiento del sistema. Para una línea de transmisión,  $H(\omega)$  se relaciona directamente con la respuesta al impulso  $h(t)$  a través de la transformada de Fourier:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (115)$$

Donde  $\mathcal{F}$  denota la transformada de Fourier. Para una línea de transmisión infinita, la función de transferencia tiene la forma:

$$H(\omega) = e^{-\gamma(\omega)z} \quad (116)$$

Donde:

- $\gamma(\omega)$  es la constante de propagación compleja, que depende de la frecuencia
- $z$  es la distancia a la que se calcula la señal

Expandiendo

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (117)$$

Donde:

- $\alpha(\omega)$  es la constante de atenuación
- $\beta(\omega)$  es la constante de fase

Por lo tanto:

$$H(\omega) = e^{-\alpha(\omega)z} \cdot e^{-j\beta(\omega)z} \quad (118)$$

Esta expresión nos muestra que:

1.  $e^{-\alpha(\omega)z}$  representa la atenuación de la señal
2.  $e^{-j\beta(\omega)z}$  representa el desplazamiento de fase

Para obtener  $h(t)$  a partir de  $H(\omega)$ , usamos la transformada inversa de Fourier:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} \quad (119)$$

En la práctica, calcularemos  $H(\omega)$  para un rango discreto de frecuencias y usaremos la IFFT (Transformada Rápida de Fourier Inversa) para obtener una aproximación discreta de  $h(t)$ . Esta relación entre  $H(\omega)$  y  $h(t)$  es fundamental para analizar el comportamiento de la línea en los dominios de frecuencia y tiempo, permitiéndonos predecir cómo la línea afectará a las señales transmitidas. Para el dominio discreto, la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa (IDFT) se definen de la siguiente manera:

1. Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (120)$$

*para*  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

2. Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT):

$$x[n] = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (121)$$

*para*  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Donde:

- $x[n]$  es la secuencia de entrada en el dominio del tiempo discreto
- $X[k]$  es la secuencia de salida en el dominio de la frecuencia discreta
- $N$  es el número de puntos de la secuencia



### 2.10.1 Relación de la respuesta al impulso con los Parámetros de la Línea de Pares

La obtención de la respuesta al impulso está estrechamente relacionada con los parámetros de la línea de pares mencionados anteriormente. Estos parámetros ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$ ) determinan la función de transferencia  $H(\omega)$  de la línea, que a su vez define la respuesta al impulso  $h(t)$ . La constante de propagación  $\gamma$ , calculada a partir de estos parámetros, influyen directamente en la forma de  $h(t)$ .

Por ejemplo, la atenuación  $\alpha$  afecta la amplitud de  $h(t)$ , mientras que la constante de fase  $\beta$  determina el desfase que va tener nuestra señal en la línea. La estimación de valores típicos (o, al menos, admisibles) de los cuatro parámetros de una línea de pares se ha realizado en el ANEXO II. Allí se explica al detalle cómo obtener estos parámetros a partir de las características físicas de los cables que constituyen la línea y del medio en la que se encuentra inmersa. Los valores obtenidos, con los que se trabajará a modo de ejemplo en este TFG, son los siguientes:

- Resistencia por unidad de longitud ( $R$ ):  $1.158e-02 \Omega/m$
- Inductancia por unidad de longitud ( $L$ ):  $9.169e-07 H/m$
- Capacitancia por unidad de longitud ( $C$ ):  $1.213e-11 F/m$
- Conductancia por unidad de longitud ( $G$ ):  $1.370e-13 S/m$

### 3 OBJETIVOS

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es desarrollar una interfaz gráfica que ilustre de manera didáctica la propagación de señales en líneas de transmisión. Para lograr este propósito, se han establecido los siguientes objetivos específicos:

**Analizar teóricamente el comportamiento de las señales en líneas de transmisión**

Aplicar las ecuaciones de Maxwell, junto con las ecuaciones del telegrafista y otros fundamentos de electromagnetismo para modelar la propagación de señales. Además, se estudiarán los fenómenos de atenuación y distorsión en diferentes tipos de líneas de transmisión.

**Implementar un modelo práctico basado en la Transformada Discreta de Fourier:**

Utilizar la TDF para simplificar y analizar la propagación de señales en el dominio de la frecuencia. Validar el modelo a través de ejemplos prácticos y casos con soluciones analíticas conocidas.

**Proponer soluciones para minimizar los efectos negativos en la transmisión de señales:**

Explorar estrategias para reducir la distorsión y la atenuación, mejorando la calidad de la transmisión en sistemas prácticos.

**Desarrollar una herramienta educativa:**

Diseñar y programar una interfaz gráfica que permita a los usuarios visualizar de manera interactiva los efectos de la atenuación y la distorsión en las señales. Facilitar la comprensión de conceptos complejos relacionados con la propagación de señales a estudiantes de ingeniería.

Para alcanzar estos objetivos, se requiere:

- Un ordenador o portátil, que se utilizará para las tareas de programación y procesamiento.
- Altavoces, necesarios para reproducir los sonidos procesados.
- Un micrófono, imprescindible para la captura de audio.

## 4 MATERIALES Y MÉTODOS

Para obtener la respuesta al impulso de la línea de pares en un entorno de simulación:

1. Se crea un modelo discreto de la línea utilizando los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , y  $G$ .
2. Se genera una delta de Kronecker como entrada.
3. Se aplica esta entrada al modelo de la línea.
4. Se registra la salida, que representa  $h[n]$ .

Para la determinación de la frecuencia de muestreo, tomamos como referencia el ancho de banda del audio compact Disc, que es de 22050 Hz, lo cual es más que suficiente para nuestro propósito, pues para transmitir la señal de voz, el ancho de banda necesario es de 4kHz, por tanto, es más que suficiente. De acuerdo con el teorema de muestreo de Nyquist, mencionado anteriormente, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima del sistema

$$f_s > 2 f_{\max} \quad (122)$$

Por lo tanto, para nuestro sistema, la frecuencia de muestreo necesaria debe ser de al menos 8000 Hz para garantizar una representación precisa de las señales de voz, dado que tiene un ancho de banda de aproximadamente de 4khz.

### 4.1 Análisis previo

En el contexto de sistemas discretos, la entrada impulso se representa mediante la delta de Kronecker discreta, denotada como  $\delta[n]$ . Esta función se define matemáticamente como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (123)$$

En la práctica, para generar una delta de Kronecker en un entorno de simulación como MATLAB, se puede utilizar un simple vector:

$$x = [1, \text{zeros}(1, N - 1)]; \quad (124)$$

Donde  $N$  es la longitud deseada de la secuencia. En la figura inferior podemos apreciar el modelo de esta delta.

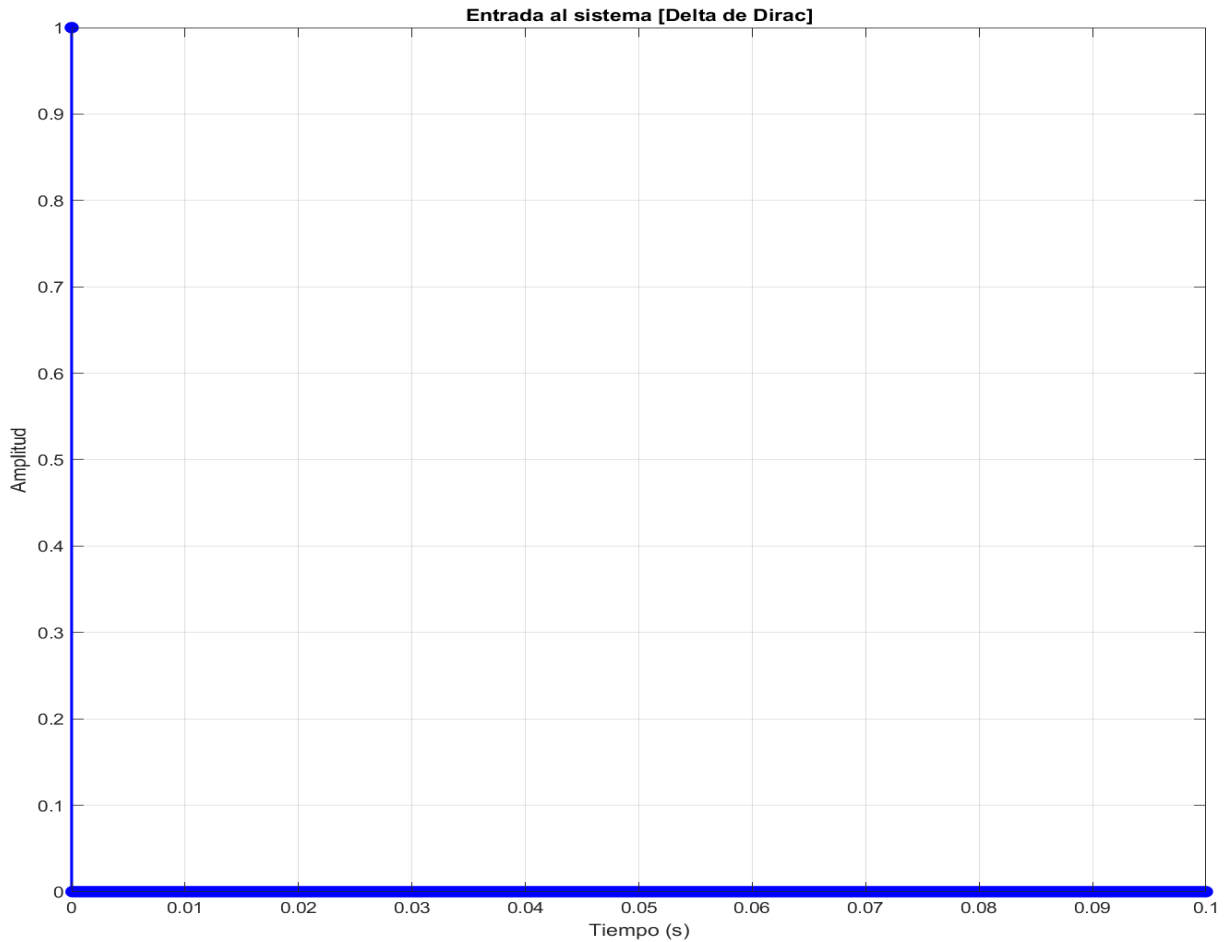


Figura 4-1: Señal de entrada de nuestro sistema modelado con una delta de Dirac. Donde la primera muestra tiene un valor de 1, mientras que el resto de muestras tiene un valor de 0. Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz.

En este apartado se ha optado por usar una frecuencia mucho más, de baja de 1500 Hz, con el fin de obtener una mejor representación debido al bajo número de muestras. La simulación del sistema se puede realizar tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Ambos métodos son matemáticamente equivalentes, pero al procesar en el dominio de la frecuencia, obtenemos varias ventajas computacionales.

#### 4.1.1 Dominio temporal

En el dominio del tiempo, la salida  $y[n]$  se obtiene mediante la convolución discreta de la entrada  $x[n]$  con la respuesta al impulso del sistema  $h[n]$ :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (125)$$

En la práctica, esta suma se limita a un rango finito debido a la naturaleza finita de las secuencias discretas. La implementación en MATLAB podría ser:

$$y = \text{conv}(x, h) \quad (126)$$

Cabe destacar que la señal de salida  $y$  tiene una longitud de una señal de la suma de la longitud de la señal  $x$  y la señal  $h$ , es decir:

$$N = L + P - 1 \quad (127)$$

- $N$  es la longitud de la señal salida  $y$
- $L$  es la longitud de la señal de entrada  $x$
- $P$  es la longitud de la respuesta al impulso

#### 4.1.2 Dominio frecuencia

Por otro lado, en el dominio de la frecuencia, la salida se obtiene multiplicando las transformadas discretas de Fourier (DFT) de la entrada y la respuesta al impulso:

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k] \quad (128)$$

El inconveniente de este método es que para obtener la misma solución que cuando se hace la convolución lineal, las señales deben de tener simetría par. Además, a la hora de hacer la multiplicación, ambas señales deben cumplir con una longitud dada de muestras, dada por la siguiente condición:

$$N \geq L + P - 1 \quad (129)$$

En la práctica, a este proceso se le llama convolución circular. Para conseguir que las señales lleguen a una longitud de  $N$  se deben de rellenar con ceros, de esa manera se pueden multiplicar entre sí en el dominio de la frecuencia.

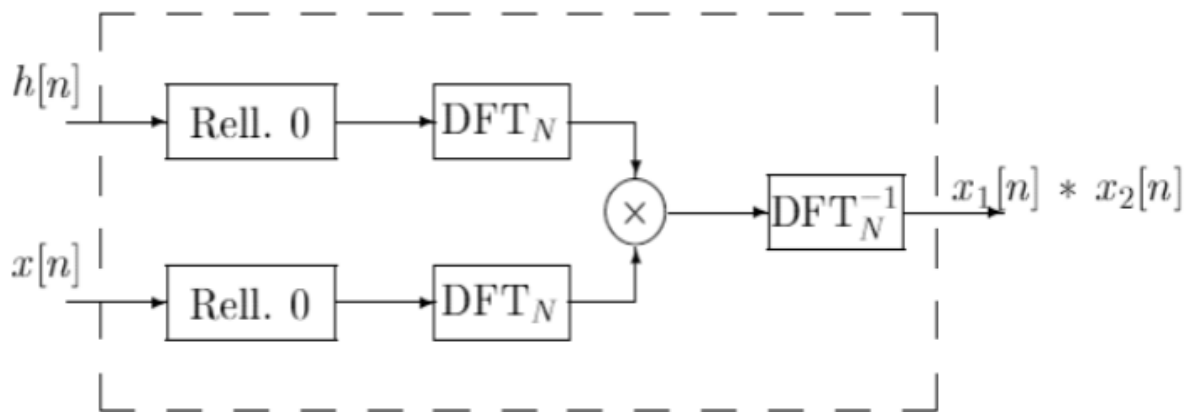


Figura 4-2: Cálculo de la convolución lineal usando la DFT, aunque en nuestro caso usaremos el algoritmo de la FFT<sup>7</sup>

#### 4.1.2.1 Ejemplo de convolución circular

Como se observa en la Figura 8, la señal de entrada tiene una longitud de 3 muestras. Por lo tanto,  $N$  debe tomar el valor de 5. Esto implica que es necesario rellenar cada señal con dos ceros adicionales para cumplir con la condición establecida

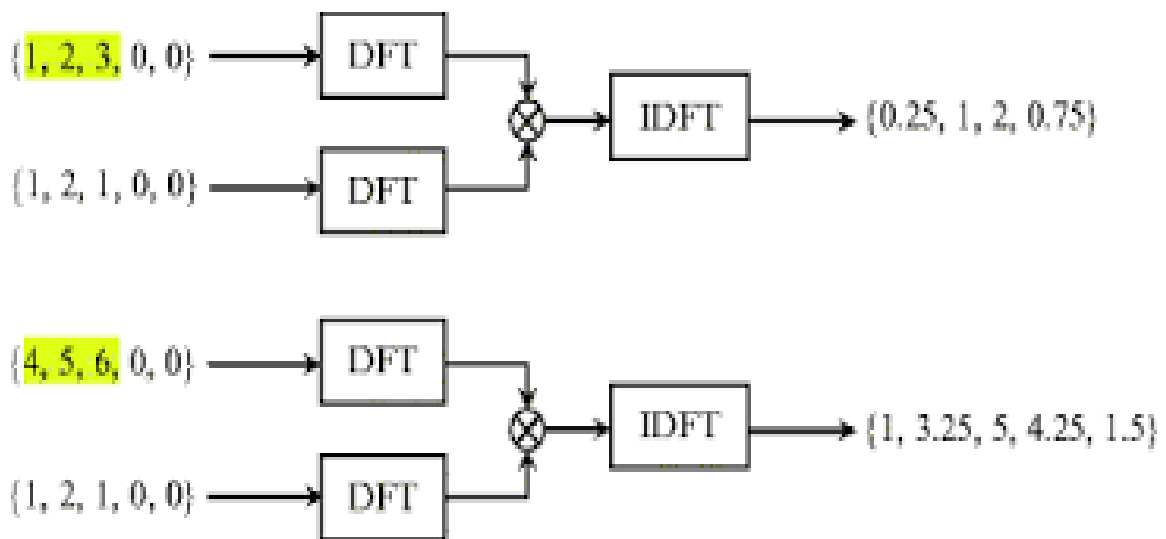


Figura 4-3: Ejemplo de uso de la convolución lineal usando la convolución circular con la DFT<sup>8</sup>

<sup>7</sup> «TFG\_Ela Messe\_Juan Demostenes Asumu».

<sup>8</sup> Rao, Kim, y Hwang, «Discrete Fourier Transform».

## 4.2 Análisis Temporal

El análisis temporal implica examinar las características de las señales en el dominio del tiempo. Para ello, representamos gráficamente  $x[n]$ ,  $h[n]$  teórica, e  $y[n]$  obtenidas.

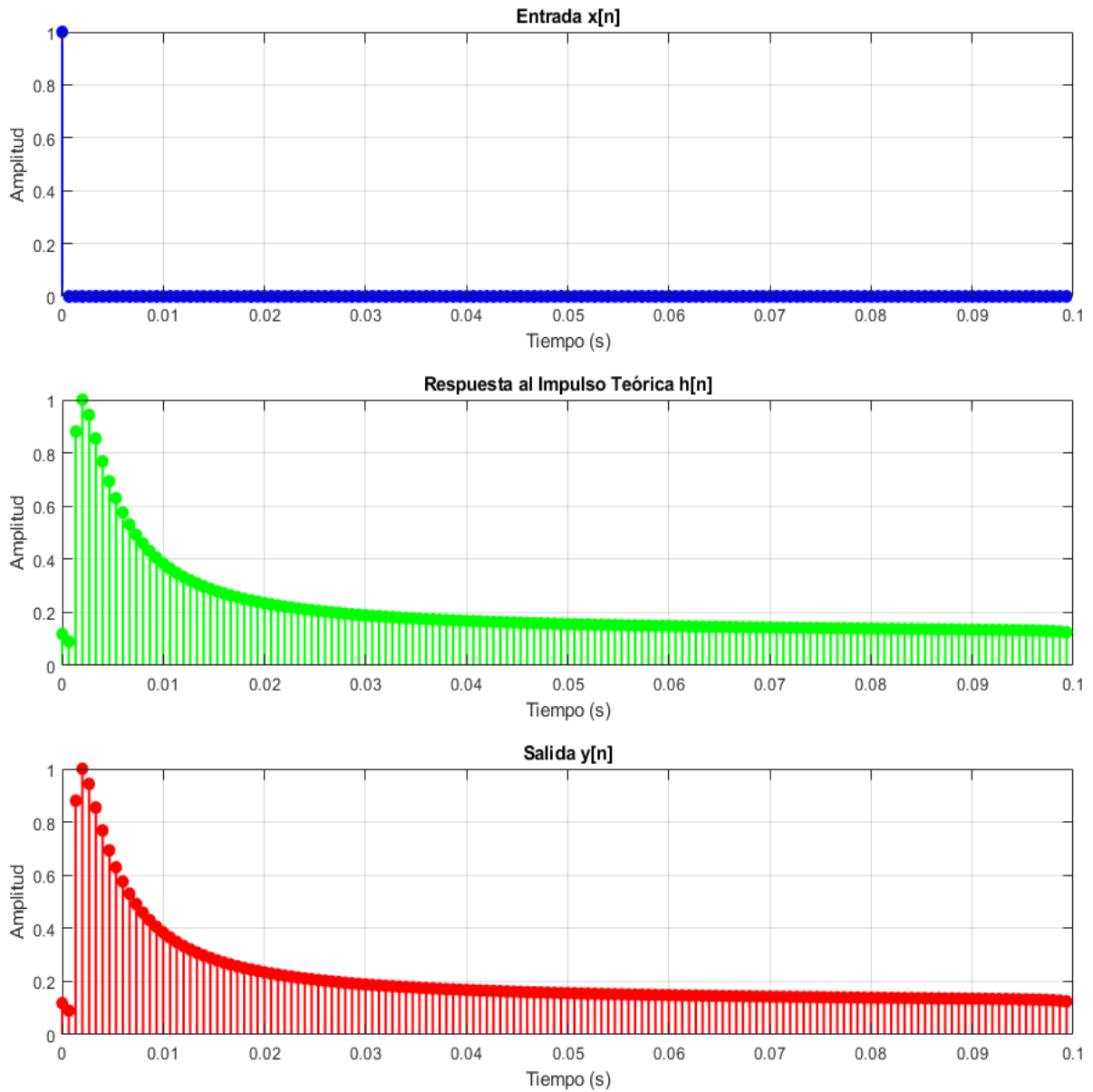


Figura 4-4: La señal azul es la entrada de nuestro sistema, que es una delta de Dirac; la señal en verde es la respuesta al impulso en el dominio del tiempo que ha sido obtenida de hacer IFFT de su respuesta en frecuencia. Por último, la señal en rojo es la salida de nuestro sistema, que como cabía de esperar corresponde a la respuesta al impulso. Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz

Con el fin de detectar si habido cualquier error en la obtención de la respuesta al impulso del sistema, hemos optado por calcular el error cuadrático medio (MSE) entre  $h[n]$  y  $y[n]$  proporciona una medida cuantitativa de la precisión de la simulación:

El error cuadrático medio se puede expresar como:

$$MSE = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_0^{N-1} (h[n] - y[n])^2 \quad (130)$$

En MATLAB, se calcula como:

$$mse = mean((h - y).^2); \quad (131)$$

Un MSE bajo indica una buena correspondencia entre las señales de la respuesta teórica y la simulada. Por otro lado, el análisis del retardo y la atenuación se pueden hacer de la siguiente manera: el retardo del sistema se determina comparando la posición del pico máximo entre la entrada y salida del sistema. La atenuación se evalúa analizando las amplitudes máximas de la entrada y salida: una reducción en la amplitud de la señal de salida indica cuánto se ha debilitado la señal.

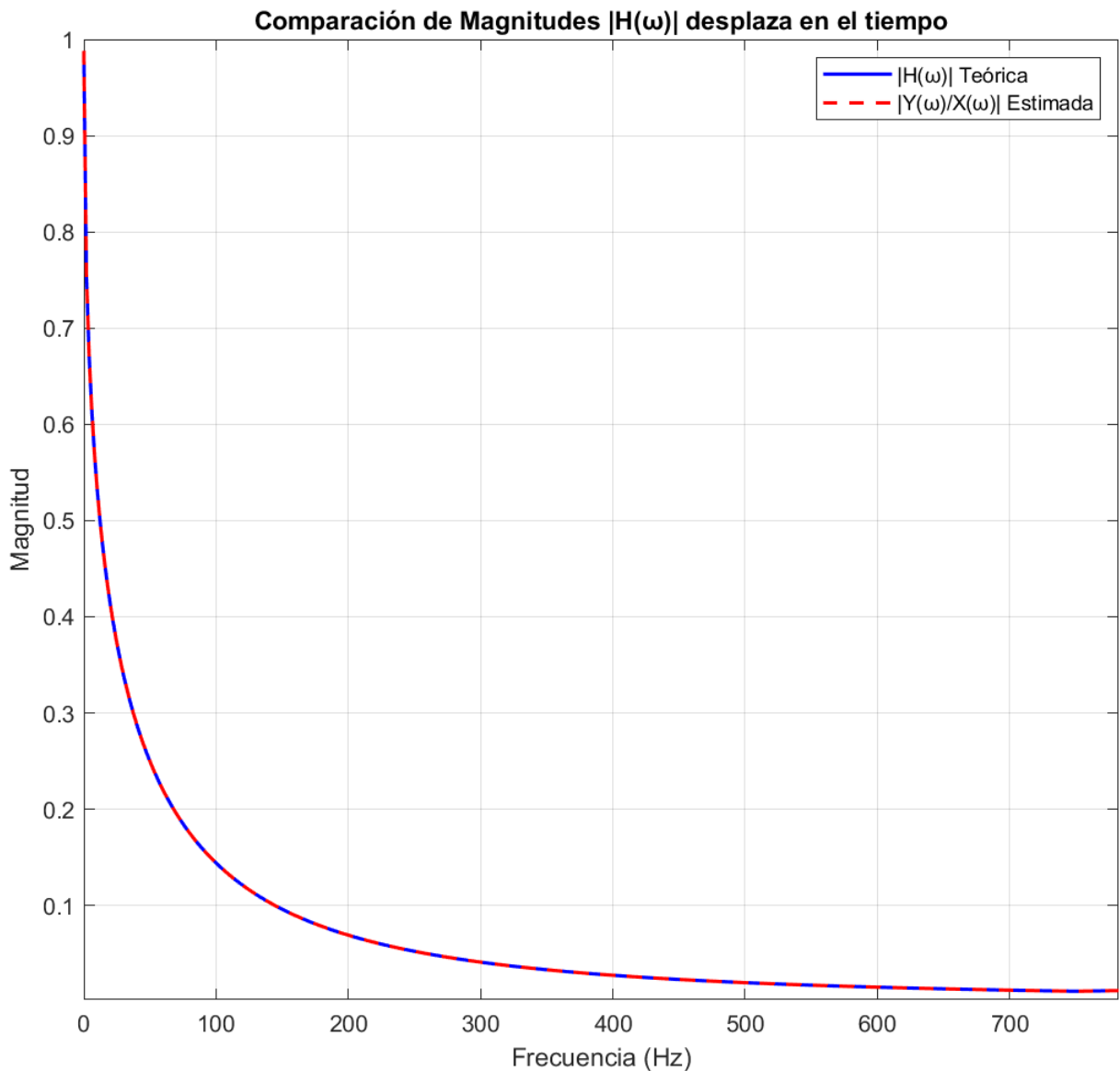
```
Error Cuadrático Medio (MSE) entre h[n] y y[n]: 0.000000
Retardo entre h[n] y y[n]: 0.000000 segundos
Atenuación entre h[n] y y[n]: 0.000000
```

*Figura 4-5: Resultados de las simulaciones impresas por la consola de MATLAB relacionado con la figura 9*

### 4.3 Análisis frecuencial

El análisis en el dominio de la frecuencia revela características importantes del sistema que pueden no ser evidentes en el dominio del tiempo. También se puede comprobar el funcionamiento óptimo de los cálculos que se realizan en el dominio de la frecuencia. Comparar  $|H(\omega)|$  teórica con  $|Y(\omega)/X(\omega)|$  permite verificar la precisión de la simulación en el dominio de la frecuencia.





*Figura 4-6: Módulo de la respuesta al impulso del sistema  $H(\omega)$  en el dominio de la frecuencia superpuesta con el módulo de la respuesta al impulso. Obtenida al dividir la salida del sistema  $y(\omega)$  entre su entrada  $x(\omega)$ . Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz*

Una correspondencia cercana entre  $|H(\omega)|$  teórica y  $|Y(\omega)/X(\omega)|$  indica una simulación precisa. En nuestro caso podemos apreciar que la señal encaja a la perfección con los valores de la respuesta al impulso teórica. Este resultado no solo demuestra que podemos obtener la respuesta al impulso, sino que además prueba que el sistema es lineal. Esto es algo que comprobamos anteriormente con los principios de homogeneidad y superposición de los sistemas lineales. La fase de  $H(\omega)$  y  $Y(\omega)/X(\omega)$  proporciona información sobre el retardo de grupo y la distorsión de fase introducida por el sistema.

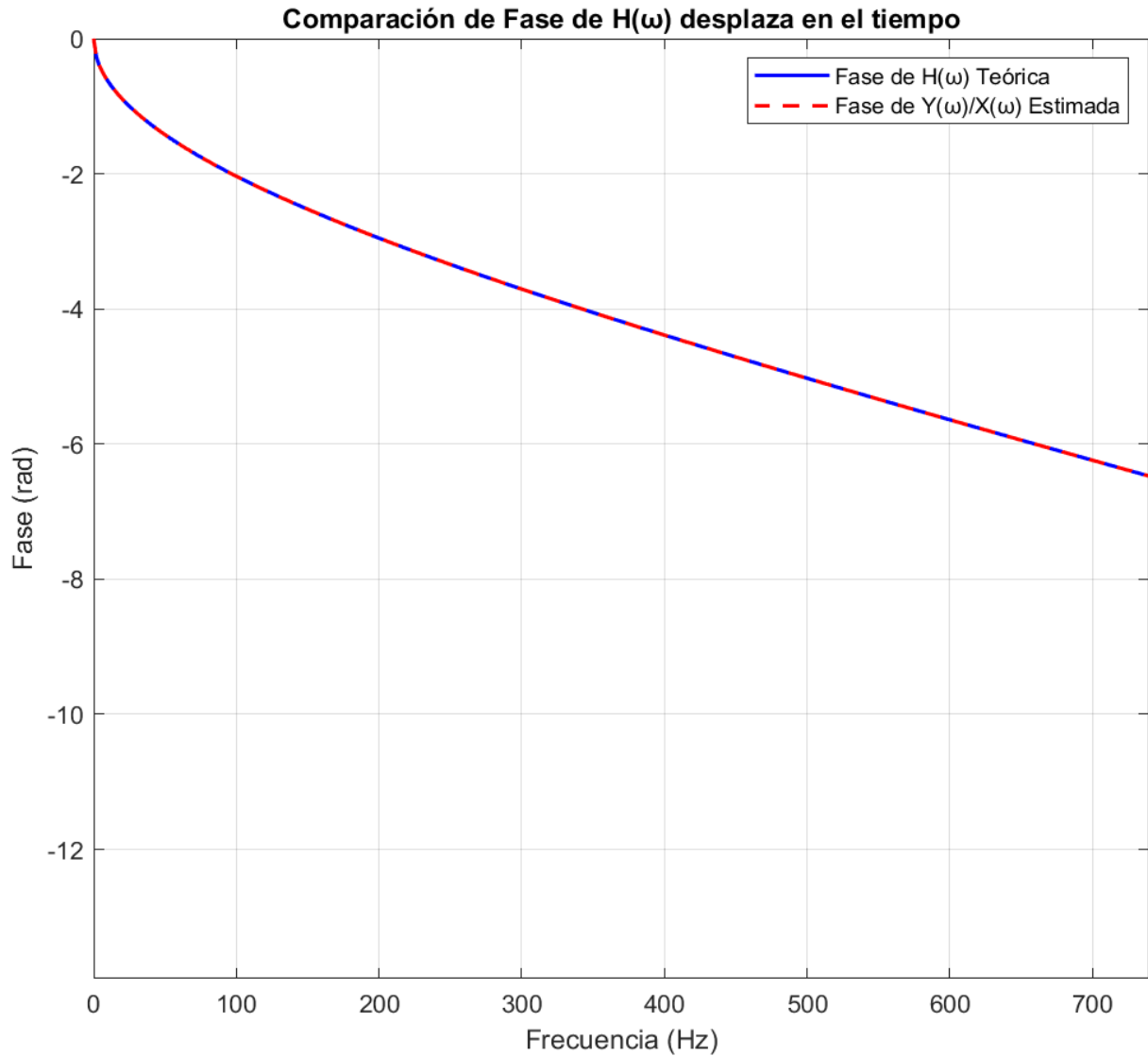


Figura 4-7: Fase de la respuesta al impulso del sistema  $H(\omega)$  (azul) en el dominio de la frecuencia superpuesta con la fase de la respuesta al impulso (roja discontinua) obtenida al dividir la salida del sistema  $y(\omega)$  entre su entrada  $x(\omega)$ . Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz

En las figuras 11 y 12 vemos como como las señales coinciden perfectamente, dejando la demostración en el dominio frecuencial por completada.

#### 4.4 Delta de Dirac Desplazada

De la misma manera, podemos obtener la respuesta al impulso de la línea de pares en un entorno de simulación, pero con una delta desplazada en el tiempo. La generación de una delta de Kronecker desplazada en MATLAB se puede realizar de la siguiente manera:

$$x = [1, \text{zeros}(1, N - 1)]; \quad (132)$$

$$x(40) = 1; \quad (133)$$

Esta simulación crea una delta desplazada  $k$  muestras hacia la derecha. El resto del proceso de simulación y análisis permanece igual, pero ahora estaremos trabajando con  $h[n-k]$  en lugar de  $h[n]$ .

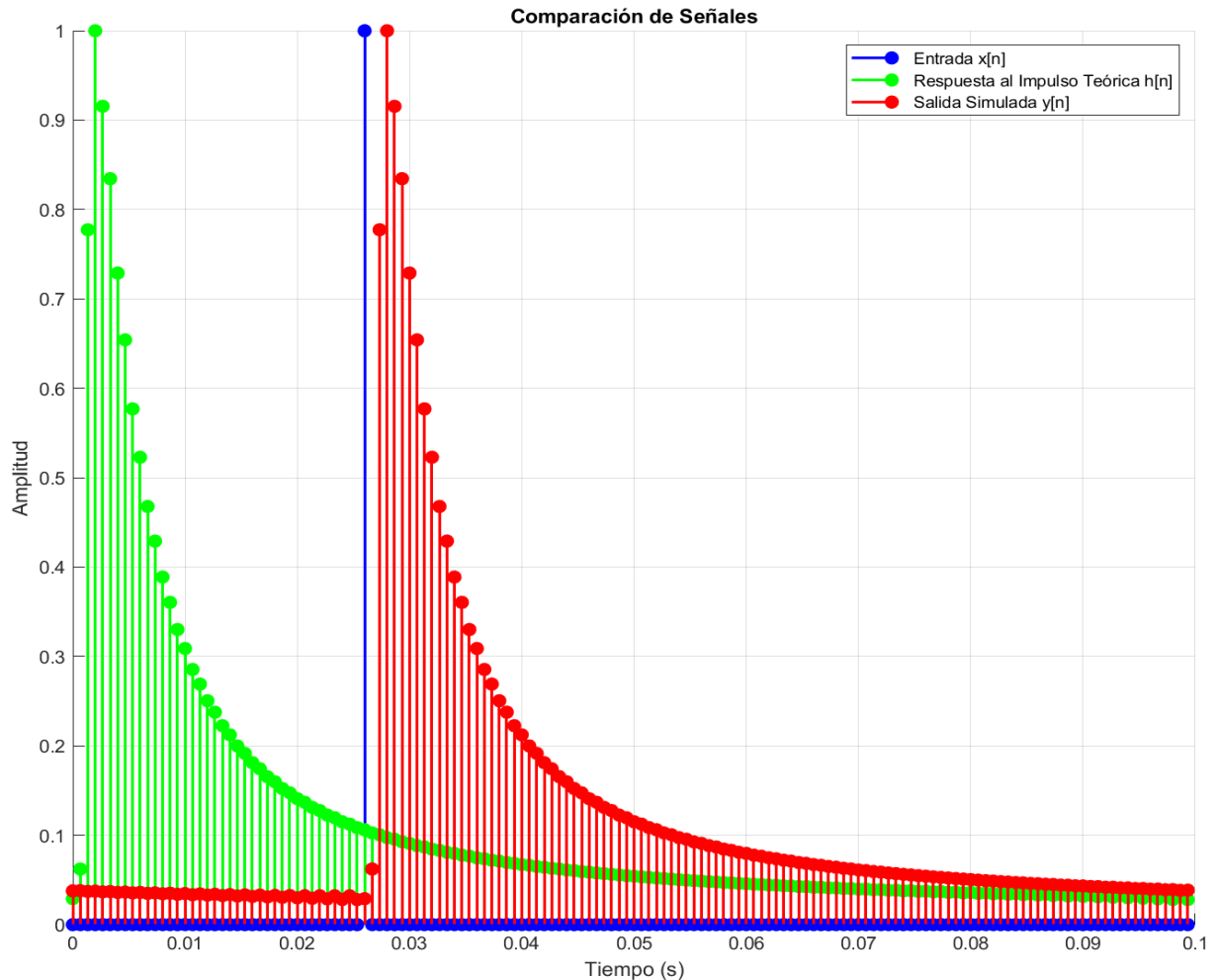


Figura 4-8: La señal azul representa la entrada de nuestro sistema, que corresponde a una delta de Dirac desplazada 40 muestras. La señal verde muestra la respuesta al impulso en el dominio temporal, obtenida al realizar la IFFT de su respuesta en frecuencia. Finalmente, la señal roja representa la salida del sistema, que, como era de esperar, coincide con la respuesta al impulso, pero en este caso en desplazada 40 muestras. Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz

Tal y como podemos comprobar más tarde en la consola de Matlab, vemos como la señal están retardas entre sí por un cierto intervalo de tiempo.

Este intervalo viene a ser una relación entre las muestras y la frecuencia de muestreo:

$$f_s \cdot T_n = n \quad (134)$$

$f_s$  es la frecuencia de muestreo

- $T_n$  es el tiempo que le corresponde a una muestra  $n$
- $n$  es la muestra en cuestión de la señal

Para comprobar que el retardo es de 40 muestras, vemos el tiempo de retardo entre las dos señales que nos devuelve Matlab por pantalla:

```
Retardo entre h[n] y y[n]: 0.026667 segundos
Atenuación entre h[n] y y[n]: 0.000000
```

Figura 4-9: Resultados de las simulaciones impresos por la consola de MATLAB relacionado con la figura 13

$$8000 \frac{\text{muestras}}{s} \cdot 0.026667s = 40.0005 \approx 40 \text{ muestras} \quad (135)$$

Es importante notar que este desplazamiento temporal introducirá un factor de fase adicional en el dominio de la frecuencia, que se manifestará como:

$$x[n - n_0] \leftrightarrow X(k)e^{-j\omega_k n_0} = X(k)e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0} \quad (136)$$

Esto afectará la fase de la respuesta en frecuencia, pero no su magnitud. La fase mostrará una pendiente adicional debido al término lineal  $-j\omega_k n$  introducido por el desplazamiento.

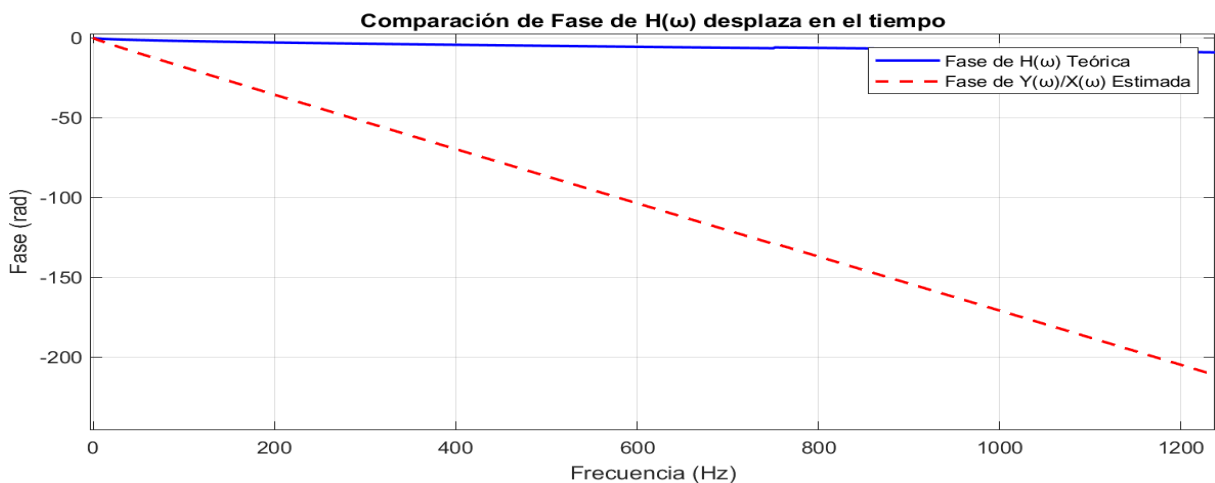


Figura 4-9: Fase de la respuesta al impulso del sistema  $H(\omega)$  (azul) en el dominio de la frecuencia con la fase de la respuesta al impulso (roja discontinua) obtenida al dividir la salida del sistema  $y(\omega)$  entre su entrada  $x(\omega)$  con un desfase temporal. Se aprecia perfectamente una pendiente más pronunciada en el segundo caso. Se usa una frecuencia de muestreo de 1500 Hz

## 4.5 La teoría de Heaviside

La teoría de Oliver Heaviside ha sido fundamental para el desarrollo del análisis de señales en líneas de transmisión. Formulada en el siglo XIX, esta teoría proporcionó las bases matemáticas para describir cómo las señales eléctricas se propagan a través de conductores, particularmente en sistemas de telecomunicaciones.

Heaviside, mediante la aplicación de ecuaciones diferenciales, introdujo conceptos clave como la inductancia o la impedancia, lo que permitió una mejor comprensión de los fenómenos de atenuación, distorsión y retraso de las señales.

Una de las aplicaciones prácticas más relevantes de esta teoría es el estudio de la propagación de señales de voz en líneas de transmisión, donde las ondas electromagnéticas transportan información acústica. En este contexto, la propagación de la voz a través de un sistema de transmisión el cual cumple la condición de no distorsión de Heaviside ha sido uno de los principales motivos de este proyecto.

Este trabajo tiene entre sus objetivos usar la simulación para comprobar la teoría de Heaviside a través del estudio de la propagación de señales acústicas, en la mayoría de casos voz, en líneas de transmisión.

Se analizarán parámetros como la velocidad de propagación, la atenuación y la distorsión, y se compararán con las predicciones teóricas. Mediante esta comprobación se busca demostrar cómo los principios fundamentales de la teoría pueden validarse de una manera práctica a través de varias simulaciones, que serán objeto de estudio a lo largo de este TFG.

#### 4.5.1 La condición de no distorsión

Es relevante profundizar en el análisis del procesado de señales y cómo se alcanza la condición de no distorsión de Heaviside. Antes de realizar simulaciones con los cuatro parámetros de la línea observamos que la transmisión de señales debido a la distorsión, ciertas señales como el caso de la voz se volvían ininteligibles al cabo de cierta distancia. En la figura inferior, vemos como a medida que avanzamos a lo largo de la línea, la distorsión de la señal aumenta considerablemente.

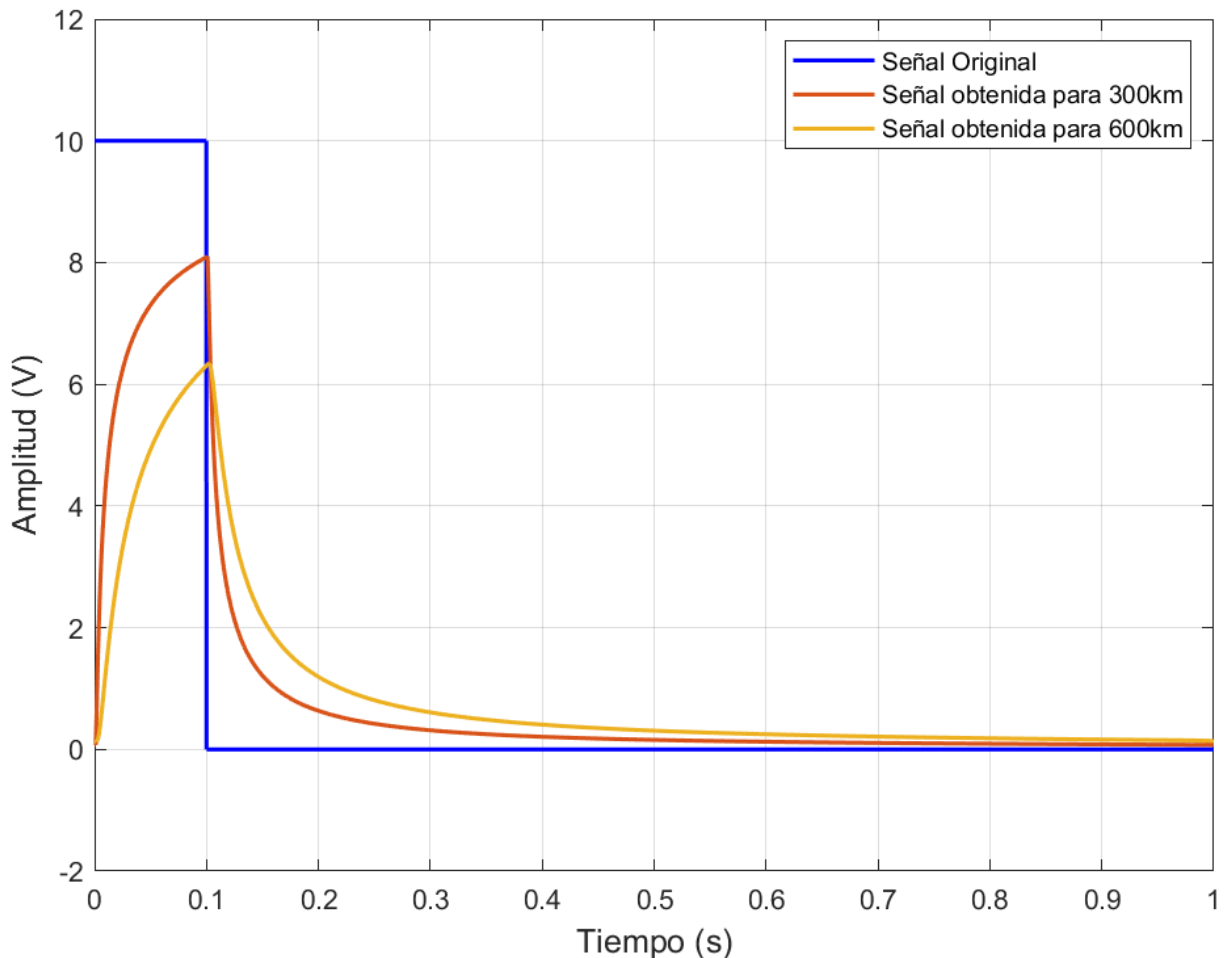


Figura 4-10: Pulso cuadrado transmitido a distancias de 300 km y 600 km donde se observa claramente que la distorsión de la señal aumenta claramente con la distancia. Se ha usado una frecuencia de muestreo de 8000 Hz y los siguientes parámetros  $R = 1.158e-02 \Omega/m$ ,  $L = 9.169e-07 H/m$ ,  $C = 1.213e-11 F/m$ ,  $G = 1.370e-13 S/m$ :

Ante esta situación, lo único que queda es buscar maneras de mitigar la alta distorsión presente en las líneas de transmisión. Una solución clave es la aplicación de la condición de no distorsión de Heaviside, la cual proporciona un criterio para la propagación eficiente de señales a través de una línea de transmisión.

Dicha condición establece que las señales pueden propagarse sin distorsión siempre que se cumpla una relación específica entre los parámetros de la línea:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (137)$$

En la práctica, modificar valores como la conductancia y la capacitancia por unidad de longitud resulta ser un proceso técnicamente complejo, además de costoso. Estas modificaciones requieren ajustes en los materiales y en el diseño físico de las líneas de transmisión, lo que incrementa significativamente los gastos operativos y de instalación. Por esta razón, el elemento que ha adquirido mayor relevancia a lo largo de la historia, tal como señaló Heaviside, es el factor de autoinducción o inductancia por unidad de longitud. Un ejemplo práctico de este enfoque es el uso de bobinas de carga o inductores distribuidos a lo largo de líneas de transmisión de telecomunicaciones de larga distancia, tal como podemos ver en la imagen.

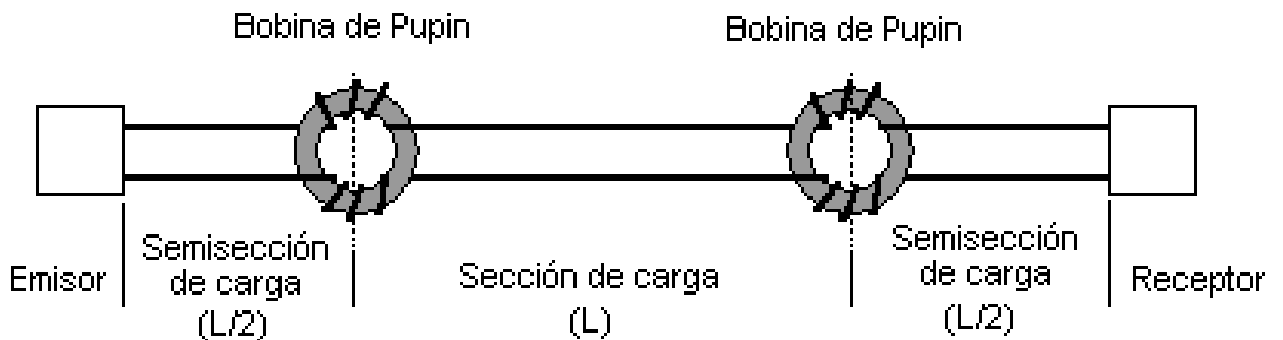


Figura 4-11: se representa cómo se distribuyen las bobinas y las secciones de carga, con el fin de aumentar la inductancia de la línea de pares y reducir la distorsión. La sección de carga se refiere a la distancia (L) entre dos bobinas de carga consecutivas. Por lo general, el circuito finaliza con media sección (L/2) en ambos extremos<sup>9</sup>

Estas bobinas, injustamente llamadas “bobinas de Pupin”, dado que fue una idea de Heaviside, permiten aumentar la inductancia sin necesidad de alterar los materiales o la estructura física de la línea, lo que representa una solución más económica y viable. Al incrementar la inductancia, se puede aproximar la línea a la condición de frontera de Heaviside, lo que permite reducir la distorsión de la señal y mejorar la calidad de la

<sup>9</sup> «Bobina de Pupin».

transmisión sin necesidad de modificar otros parámetros complejos como la capacitancia o la conductancia, por no mencionar la resistencia distribuida de la línea.

Un ejemplo de este efecto se puede visualizar en la figura inferior, donde se simula la variación del factor de autoinducción, como si se estuvieran añadiendo bobinas distribuidas a lo largo de la línea.

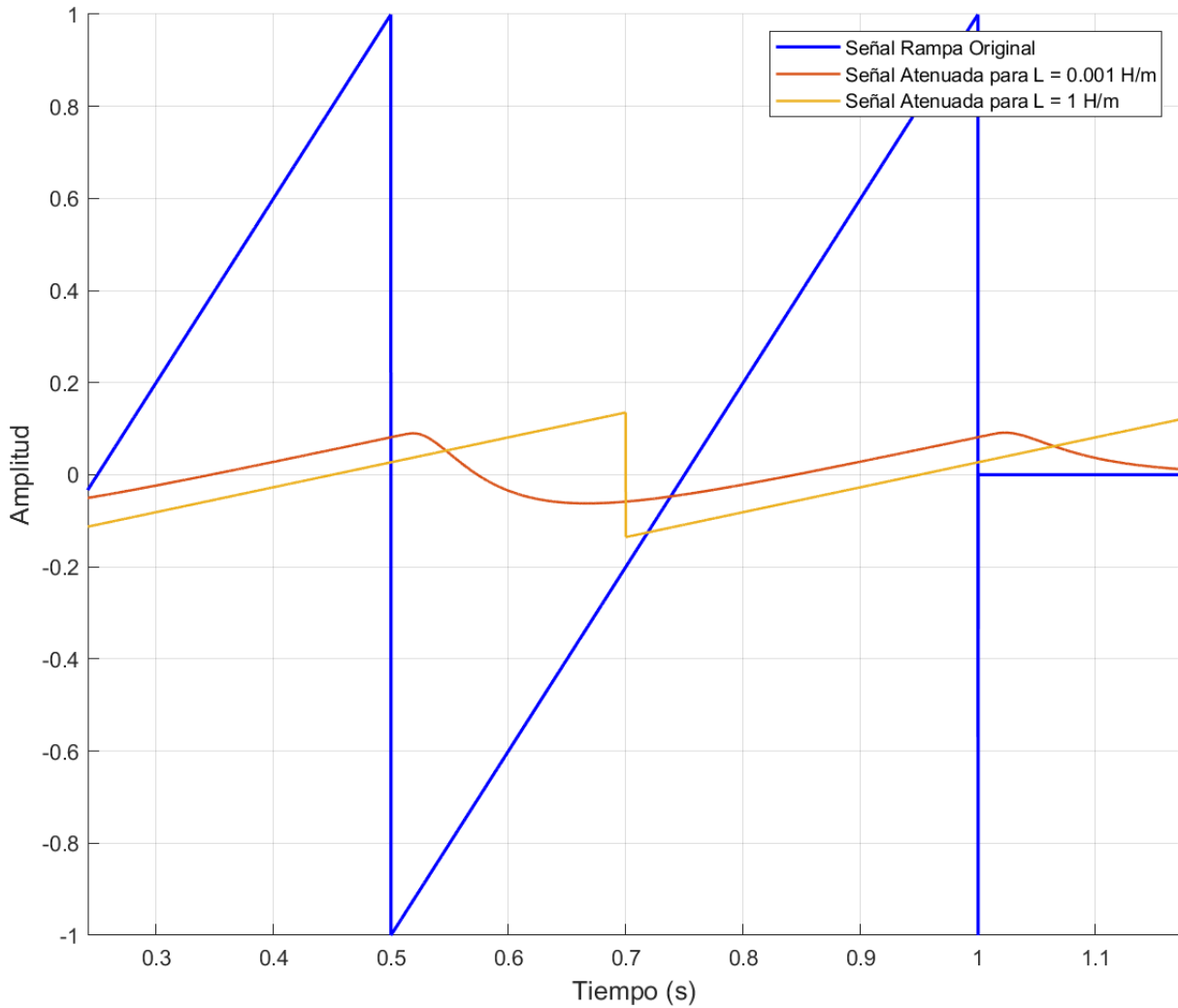


Figura 4-12: Señal rampa transmitida a distancia de 200km donde se observa claramente que la distorsión de la señal se reduce conforme nos acercamos a la condición de no distorsión. Se ha usado una frecuencia de muestreo de 8000 Hz y los siguientes parámetros  $R = 10 \Omega/m$ ,  $C = 1e-12 F/m$ ,  $G = 10e-12 S/m$ , mientras que los valores de  $L$  se ven en la leyenda de la Figura. En este caso, para evitar la distorsión deberemos de tener una  $L = 1 H/m$ .

En este caso, dichas bobinas, en honor a Heaviside, se denominarán 'bobinas de Heaviside' durante todo este trabajo. La simulación muestra cómo, al acercarnos a la condición de Heaviside se observa una disminución progresiva en la distorsión de la señal, además de una menor atenuación.



#### 4.5.2 Nueva constante de propagación

La nueva constante de propagación que obtenemos bajo la condición de no distorsión es la siguiente

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{RC}{L} + j\omega C\right)} \quad (138)$$

$$\sqrt{(R + j\omega L)\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)C} = \sqrt{(R + j\omega L)(R + j\omega L)C\frac{1}{L}} \quad (139)$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(R + j\omega L)C\frac{1}{L}} = (R + j\omega L)\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (140)$$

$$\gamma = R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega L\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (141)$$

Con todo este desarrollo las componentes de la constante de propagación  $\alpha$  y  $\beta$ , se pueden expresar como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega\sqrt{LC} \quad (142)$$

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (143)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (144)$$

Tras examinar las ecuaciones, podemos apreciar como si cumplimos la condición de no distorsión, vemos como la atenuación no depende de la frecuencia, solo de los parámetros de línea. Posteriormente tenemos que el desfase que se introduce en la línea es totalmente lineal y por tanto la velocidad de fase, expresada en la ecuación 86, no depende de la frecuencia. En otras palabras, tanto como la distorsión como la dispersión han desaparecido.

## 4.6 Entorno de programación e interfaces

Con el fin de ilustrar todos estos fundamentos de la primera parte, se ha optado por el uso de una interfaz gráfica interactiva. De esa manera el alumnado podrá ver en qué manera afectan los valores de los parámetros de la línea en la transmisión de señales. Como veremos, la interfaz tiene dos partes. La primera trata de analizar señales deterministas, mientras que la segunda se centra en las señales aleatorias, como la voz. Esta última veremos más adelante como tratarla.

### 4.6.1 *MATLAB*

El entorno de programación que se va a usar para el desarrollo del programa es Matlab. Dado que durante gran parte del grado de telecomunicaciones se utiliza extensivamente Matlab, es bastante enriquecedor que los alumnos se familiaricen con su lenguaje de programación y entorno de desarrollo a través de una aplicación como esta. Matlab tiene la versatilidad de poder realizar tareas de computación, visualización y programación con sus propias funciones. Al ser un lenguaje de alto nivel y basado en matrices y vectores es ideal para el procesado de señales; además, muchas de las funciones que vamos a utilizar están relacionadas con el mundo del procesado digital de la señal. Dicho lo anterior, para conseguir hacer una interfaz gráfica en Matlab, tenemos dos opciones. La primera opción es crearla a través de la combinación de un fichero .fig para el panel de nuestra interfaz y un fichero básico de Matlab .m para implementar nuestro código, lo que anteriormente se le llamaba GUIDE. La segunda opción, sería a través del entorno de App Designer, que nos permite tener todo lo anterior en solo archivo. De igual modo, cualquier usuario podría modificar la interfaz a través de App Designer según lo estime necesario. Por ello, esta será la opción empleada aquí.

### 4.6.2 *App Designer*

App Designer es una herramienta de Matlab que permite crear aplicaciones gráficas interactivas de forma sencilla e intuitiva. Ofrece un entorno visual para diseñar interfaces, arrastrando y soltando componentes como botones, gráficos y controles deslizantes, mientras se integra con el código de Matlab para gestionar la lógica de la aplicación. Es ideal para proyectos que requieran simulaciones interactivas o herramientas educativas, como la desarrollada en este trabajo.

### 4.6.3 Como acceder al entorno de App Designer

Cuando abramos un archivo .app, se nos abrirá el entorno correspondiente de App Designer. Ahora bien, en el caso de que queramos hacer nuestro propio programa, deberemos de seguir la secuencia de pasos que se muestra en la figura 1

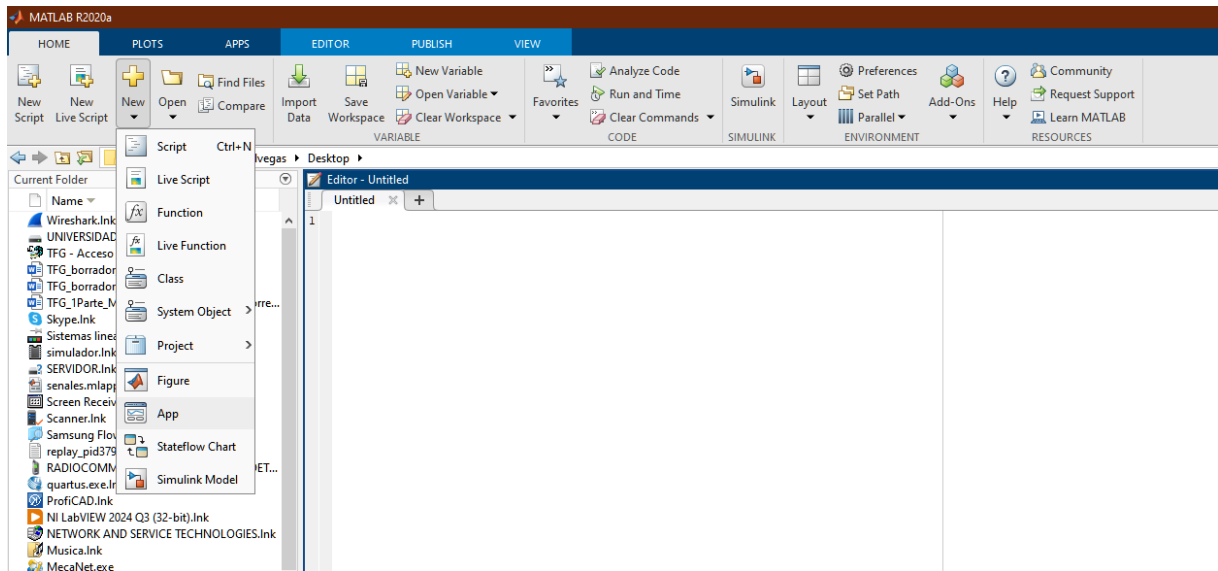


Figura 4-13 Pasos a seguir para entrar en el menú de App Designer Home>New>App

Una vez realizados estos pasos, accederemos al menú de App Designer, donde podremos crear nuestra interfaz gráfica según nuestras necesidades, además de programar los algoritmos que la acompañarán. En el menú de App Designer, al hacer clic en la opción "New", aparecerá una serie de ejemplos que podemos implementar, e incluso cuentan con un tutorial interactivo. Todo ello viene motivado por el hecho de hacer un entorno más intuitivo en consonancia con los usuarios, dado que el antiguo sistema GUIDE era más complicado de implementar.

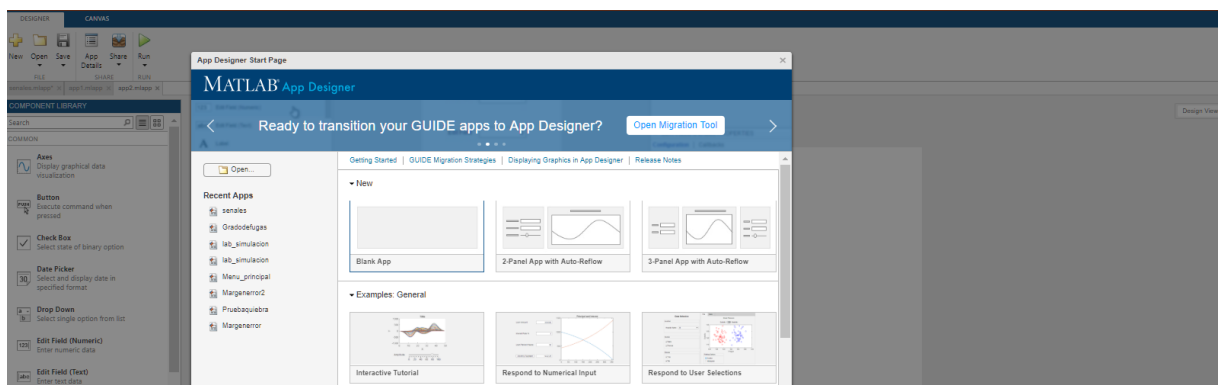


Figura 4-14: Entorno de programación de App Designer con sus ejemplos de interfaces, además de un tutorial

#### 4.6.3.1 Conceptos básicos para empezar con App Designer

Características generales necesarias para comenzar a crear una interfaz gráfica en MATLAB App Designer:

##### Conceptos fundamentales:

- Manejo de variables: App Designer utiliza propiedades de componentes para almacenar datos, además de poder crear variables globales a las que puedan acceder otros elementos y compartir datos entre sí .
- Objetos y estructuras: En App Designer, los componentes de la interfaz son objetos con propiedades y métodos, facilitando la organización y manipulación de datos.
- Funciones especiales: App Designer proporciona métodos predefinidos para manejar eventos y actualizar la interfaz, simplificando la programación.

##### Componentes principales de una aplicación en App Designer:

- Callbacks: Son funciones que se ejecutan en respuesta a eventos específicos.
- Eventos: Interacciones del usuario o del programa que desencadenan acciones en la aplicación.

#### 4.7 Implementación de las señales deterministas

A continuación, veremos la primera parte de la interfaz, que se centra principalmente en las señales deterministas, es decir, aquellas que tienen una transformada de Fourier. Para ilustrar mejor la propagación de las señales por las líneas de transmisión, se ha optado por dotar al usuario de herramientas para poder hacer “zoom” en las distintas áreas de interés, entre otras herramientas. Con respecto a los parámetros de la línea se ha optado que el usuario introduzca 4 los parámetros distribuidos en unidades de metros. En el caso de la distancia de la línea de transmisión se ha optado por las unidades de km.

```
k = app.distancia; % Distancia para el cálculo de atenuación
k = k*1000; % Convertimos distancia en metros(km->m)
anchopulso = app.anchurapulso; % Ancho del pulso (en segundos)
R1 = app.R; % Resistencia por unidad de longitud (Ohmios/m)
C1 = app.C; % Capacitancia por unidad de longitud (Faradios/m)
G1 = app.G; % Conductancia por unidad de longitud (Siemens/m)
L1 = app.L; % Inductancia por unidad de longitud (Henrios/m)
```

Figura 4-15: Código de Matlab encargado de hacer las conversiones al Sistema Internacional de Medidas

En consonancia con la condición de Heaviside, se ha introducido una calculadora para obtener la inductancia distribuida necesaria para conseguir esta condición.

Así, por ejemplo, si un usuario desea conocer cuánta inductancia distribuida debe aplicar a su línea de transmisión para evitar distorsión, bastará con ingresar el nuevo valor y volver a simular la señal.

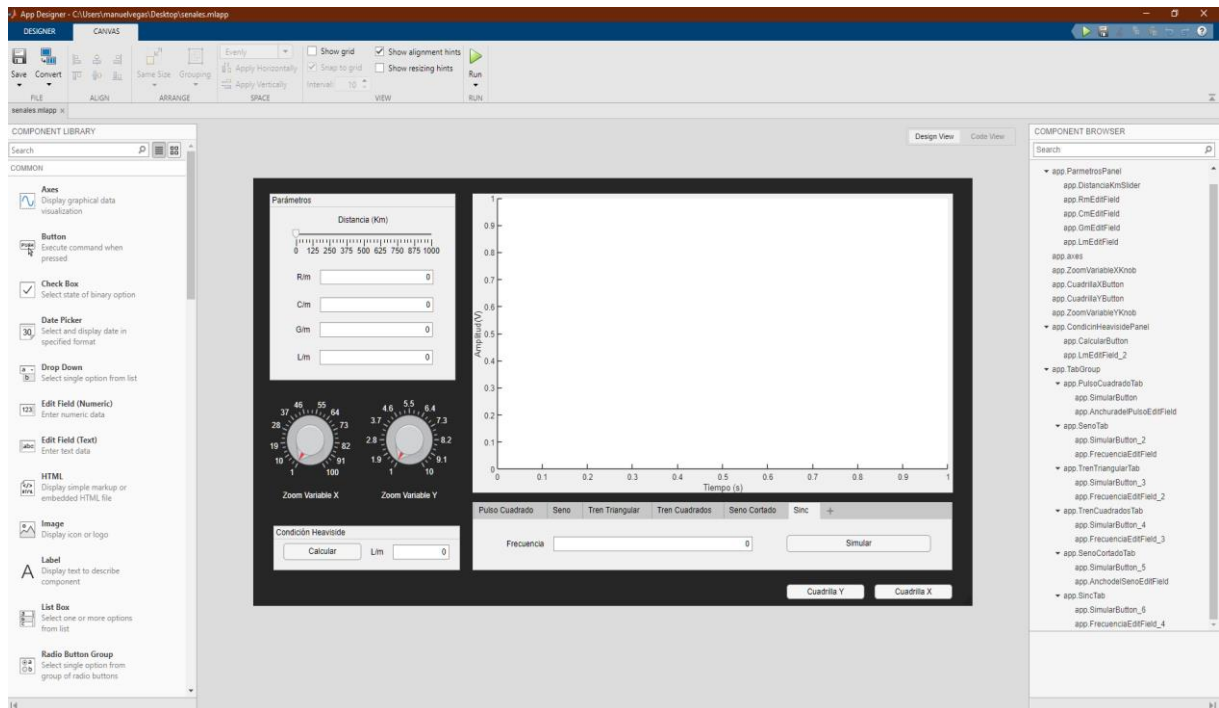


Figura 4-16: Interfaz del usuario en el entorno de App Designer; a la derecha se puede ver todos los elementos que la componen

#### 4.7.1 Uso de la interfaz y su funcionamiento

La interfaz incluye varios elementos interactivos que permiten al usuario personalizar las simulaciones según sus necesidades:

##### **Panel de Configuración de Parámetros:**

- El usuario puede ingresar los valores correspondientes a los parámetros distribuidos de la línea, como resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia por unidad de longitud.
- La distancia de la línea de transmisión se introduce en kilómetros y se convierte automáticamente al Sistema Internacional de Medidas (SI).

##### **Gráfico de Visualización de Señales:**

- Se presenta un gráfico interactivo donde se pueden observar las señales.
- Herramientas como el zoom, desplazamiento, y ajuste automático del eje permiten analizar en detalle las áreas de interés.

Calculadora de Inductancia Distribuida:

- Esta funcionalidad ayuda a los usuarios a cumplir con la condición de Heaviside.
- Al presionar el botón de la calculadora, el sistema calcula el valor óptimo de inductancia distribuida necesario para evitar distorsión en la línea de transmisión.

Panel de Simulación de Señales:

- Un botón de simulación permite ejecutar el modelo con los valores configurados, según la señal que se desee analizar.

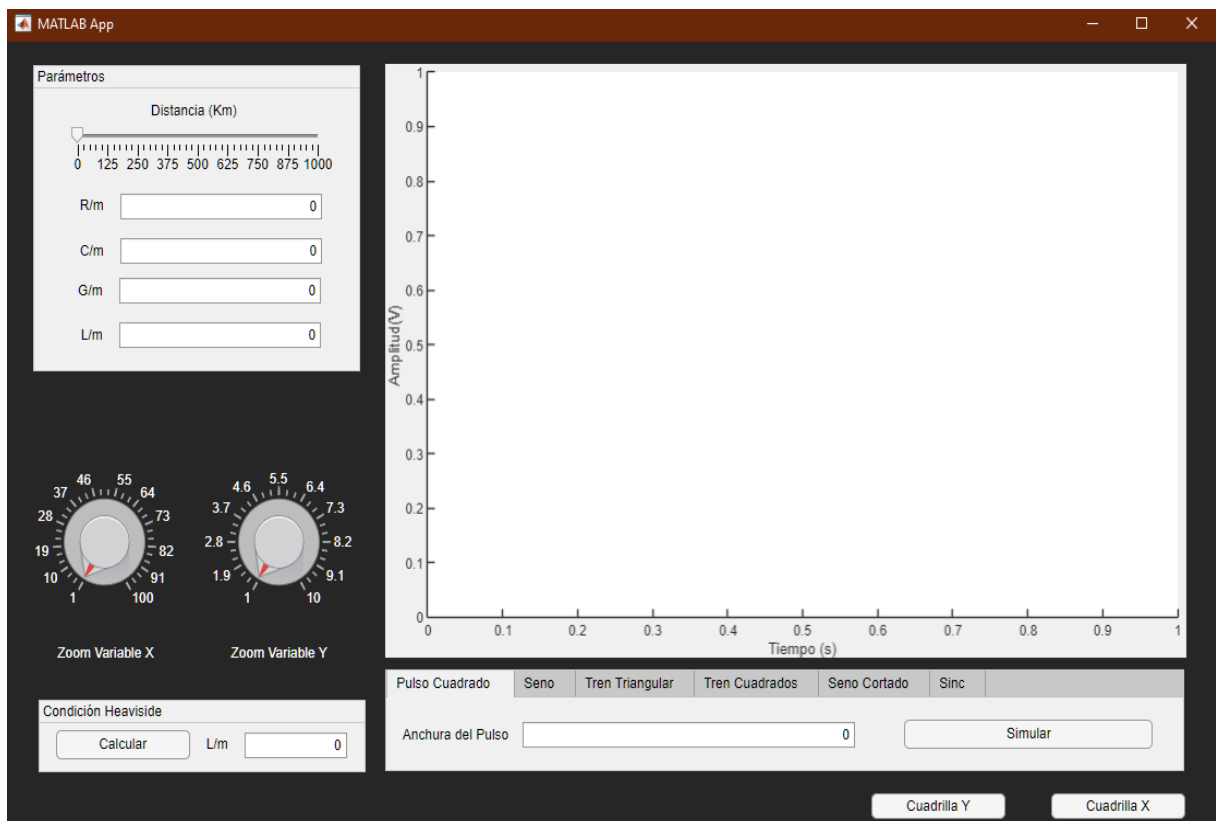


Figura 4-17: En la parte superior izquierda se encuentra el panel de configuración de parámetros, mientras que abajo a la izquierda se encuentra la calculadora de inductancia distribuida y los reguladores de zoom. A su derecha el panel de simulación de señales y el grafico para la visualización de señales

Al abrir la aplicación, se inicializan todos los parámetros con valores a 0. Los usuarios pueden modificar los 4 parámetros directamente desde la interfaz, utilizando los cuadros de texto. En este TFG se han usado los valores que se han definido previamente en el anexo de línea pares

- Resistencia por unidad de longitud ( $R$ ):  $1.158e-02 \Omega/m$
- Inductancia por unidad de longitud ( $L$ ):  $9.169e-07 H/m$
- Capacitancia por unidad de longitud ( $C$ ):  $1.213e-11 F/m$
- Conductancia por unidad de longitud ( $G$ ):  $1.370e-13 S/m$

Al presionar el botón de simulación, el sistema calcula la propagación de señales en función de los parámetros ingresados. Los gráficos muestran tanto la señal original como la señal atenuada y distorsionada, en caso de no cumplirse la condición de Heaviside.

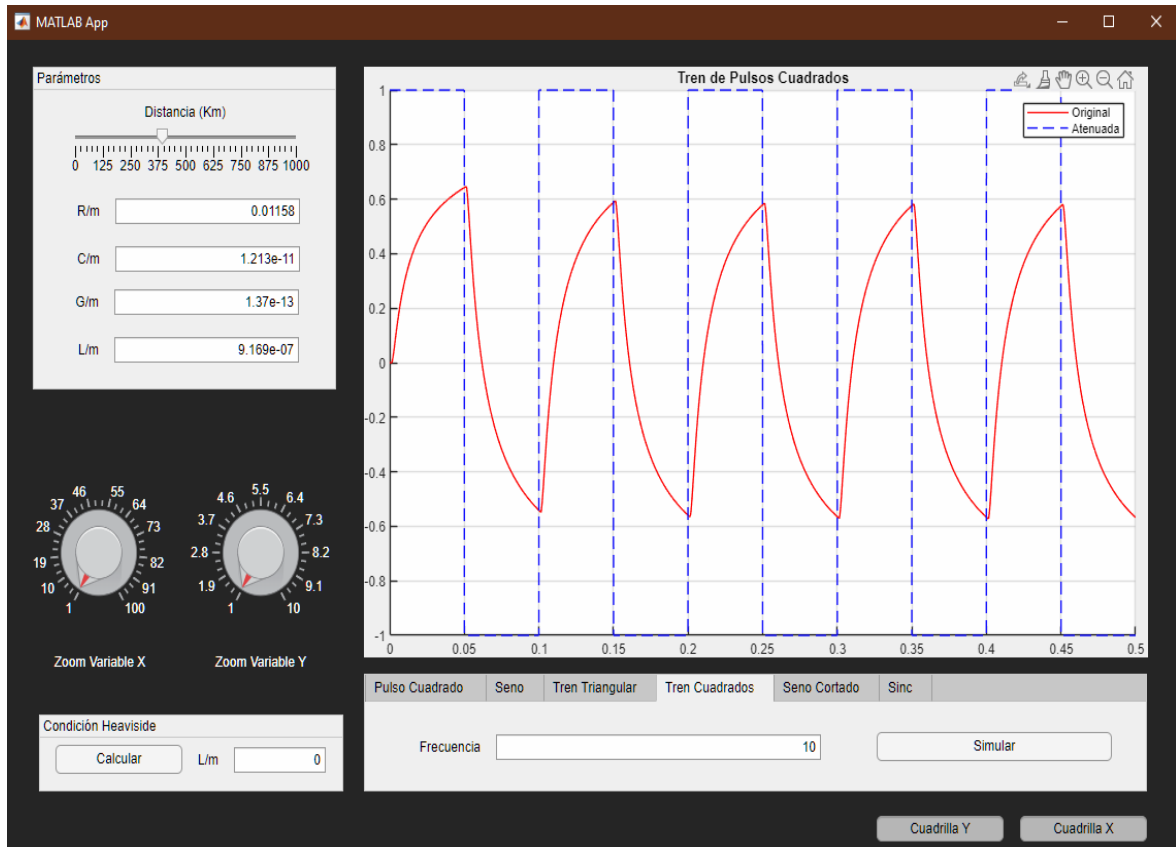


Figura 4-18: Tren de pulsos cuadrados, simulados en una línea de pares. Con una distancia aproximada de 380km

Por ejemplo, si nos centramos en el primer pulso, el usuario puede utilizar la herramienta de zoom incluida en el gráfico. Esto permite ampliar áreas específicas y observar detalles como la amplitud o la forma de la señal. Además, el gráfico ofrece opciones para guardar la visualización en formatos como PNG, TIFF, JPEG o PDF

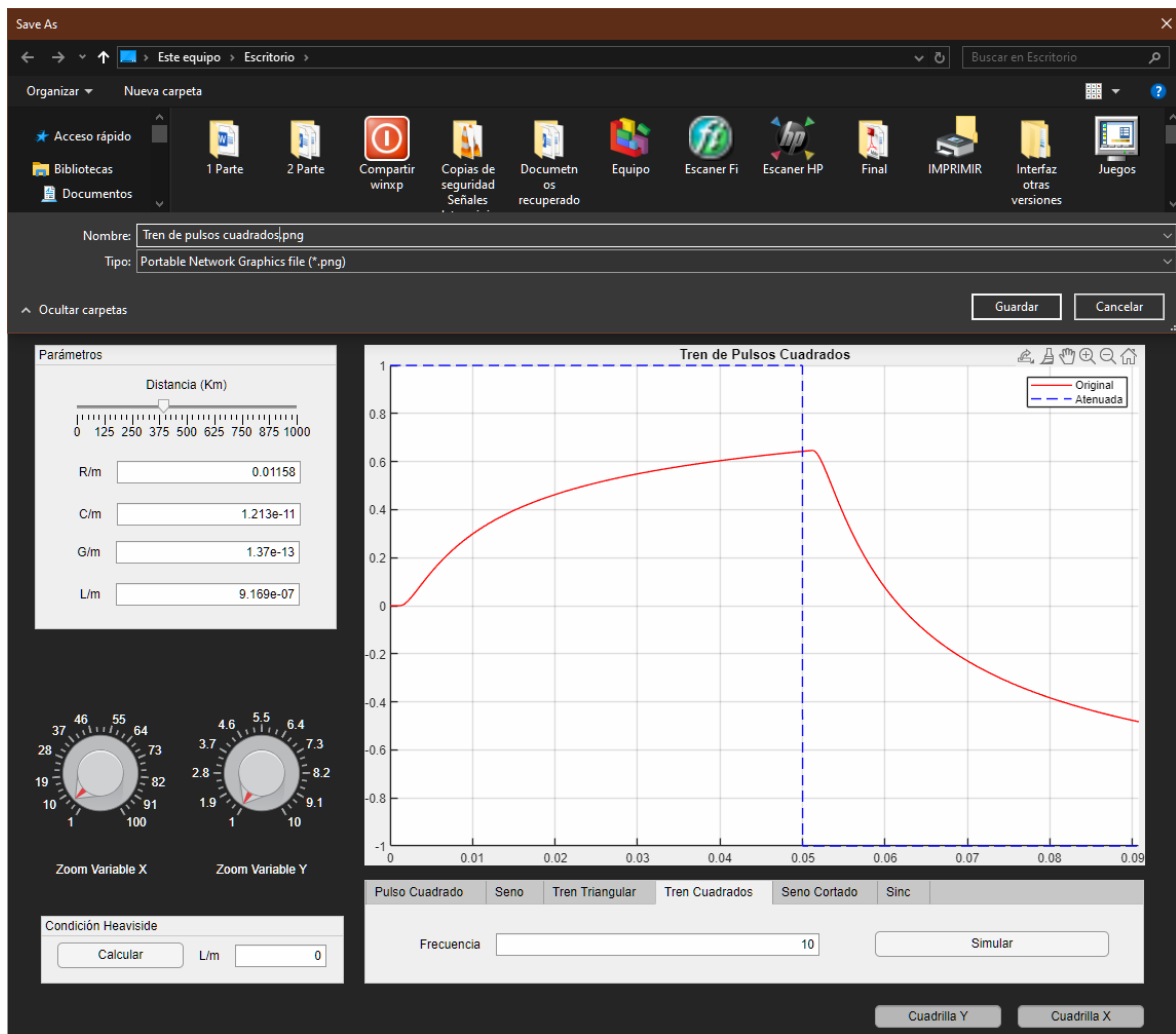


Figura 4-19: Herramienta de guardado, además de la aplicación del zoom a la señal de trenes de pulsos cuadrados

Prosiguiendo con nuestro análisis, trabajaremos con una señal de seno cortado y simularemos su propagación bajo la condición de Heaviside.

Al aplicar esta condición, que garantiza que la inductancia distribuida y la capacitancia están balanceadas, la señal se propagará sin distorsión a través de la línea de transmisión. Esto permitirá observar cómo el seno cortado mantiene su forma original, aunque sí que tendremos una pequeña atenuación que vendrá dada por la ecuación 134:

$$Atenuación = e^{-R\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot D(m)} = e^{-0.01158\sqrt{\frac{1.21e-11}{1.023}} \cdot 100e3} \approx 0.995 = -0.0236dB \quad (144)$$

Como podemos ver en la figura 4-20, la señal solo se atenúa hasta 0.97 aproximadamente



Dado que la capacitancia de nuestra línea es muy pequeña, no notaremos cambios significativos en la atenuación de la señal. Por lo tanto, lo único que se apreciará será un desfase en la señal, acompañado de una ligera atenuación.

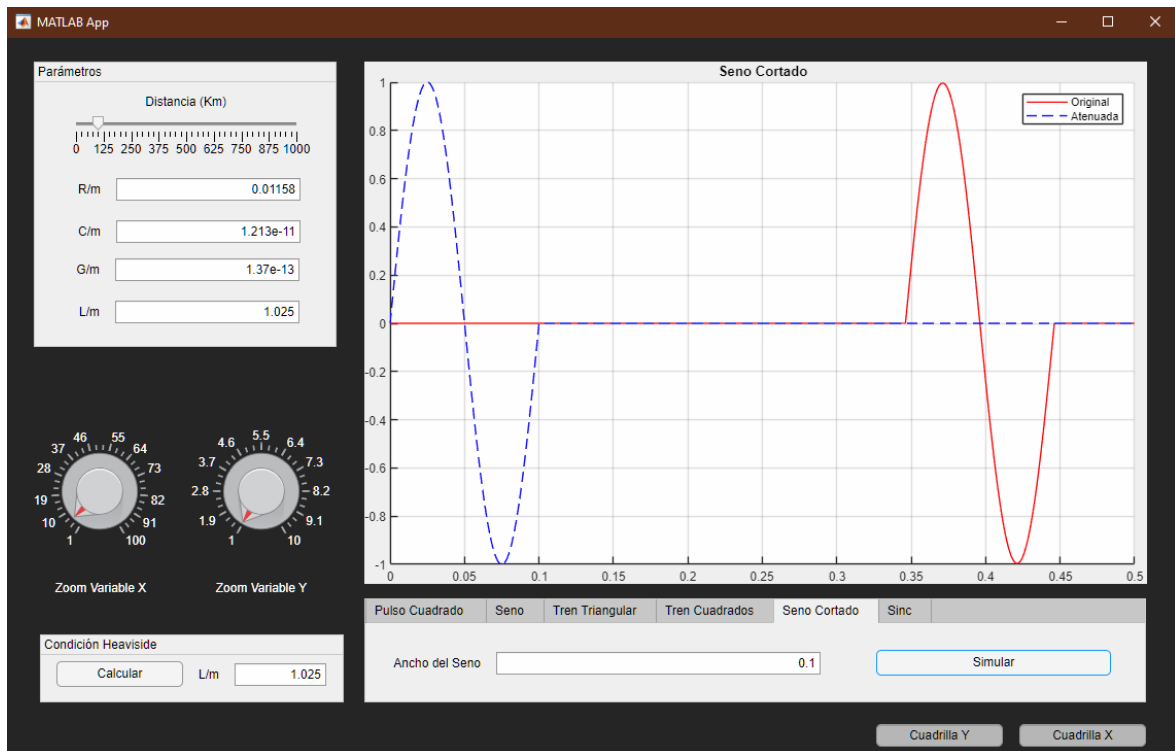


Figura 4-20: Señal de seno cortado bajo la condición de propagación de Heaviside a unos 100km

#### 4.7.1.1 Limitaciones en la simulación: frecuencia y duración

En las simulaciones se deben considerar ciertas restricciones debido a principios fundamentales:

##### **Frecuencia Máxima: 4000 kHz**

- Según el principio de Nyquist, la frecuencia máxima de la señal no puede superar los 4000 kHz para evitar aliasing y garantizar una representación precisa en el dominio temporal.

##### **Duración Máxima: 0.4 segundos**

- Para señales como el pulso cuadrado y el seno cortado, la duración máxima permitida es de 0.4 segundos, ya que la ventana de análisis está limitada a 0.5 segundos. Esto asegura que la señal se mantenga completamente dentro del intervalo definido.

## 4.8 Implementación de las señales aleatorias

En consonancia con lo que hemos visto anteriormente, la transformada de Fourier nos ha sido muy útil para analizar señales deterministas. No obstante, no nos sirve para descomponer señales que su contenido frecuencial cambia con el tiempo, como es el caso de la voz. Dada su naturaleza no estacionaria, requieren herramientas un análisis tanto en el tiempo como en la frecuencia. Para el análisis en el tiempo usaremos las convoluciones. Mientras en el dominio de la frecuencia se utiliza la transformada de Fourier en tiempo corto (STFT). Para comprender mejor esta técnica, vamos a ilustrarnos con diversos ejemplos

### 4.8.1 Preparación de la señal:

Una vez la señal de voz se graba y se digitaliza, se divide en segmentos cortos denominados "tramas de análisis". Este paso es esencial para capturar las variaciones dinámicas de la señal. En función del tamaño de la ventana tendremos un compromiso entre la resolución del tiempo y la frecuencia. Así, por ejemplo, si tenemos una señal que su información frecuencial no es constante en el tiempo, si usamos una longitud de las tramas muy grande, tendremos una buena resolución en frecuencia, pero no temporal. Sin embargo, si utilizamos una trama muy pequeña seremos capaces de ver los pequeños cambios temporales, pero tendremos una resolución en frecuencia bastante reducida.

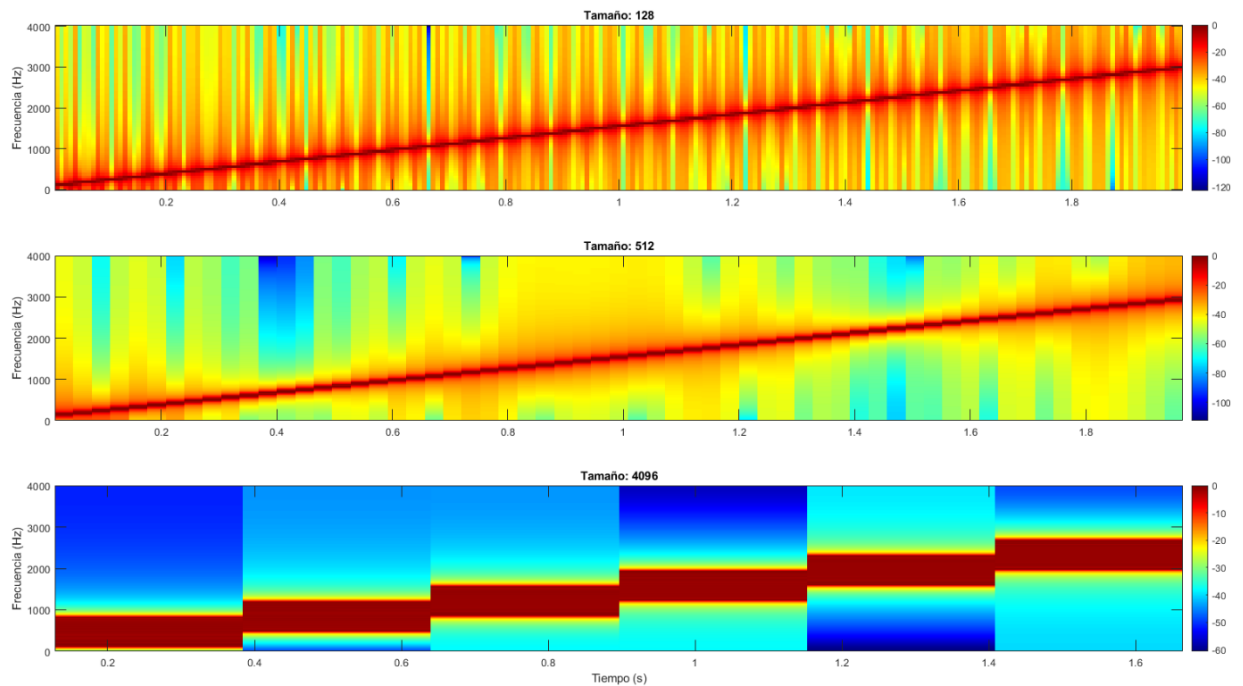


Figura 4-21: Espectrograma de una señal Chirp con distintas longitudes de trama. A menor tamaño de trama (128), se obtiene mejor resolución temporal pero peor resolución en frecuencia. Con un tamaño intermedio (512), hay un equilibrio entre ambas. A mayor tamaño (4096), la resolución en frecuencia mejora, pero se pierde detalle temporal.

#### 4.8.2 Aplicación de una ventana:

La fuga espectral ocurre cuando una señal finita se analiza mediante la Transformada Discreta de Fourier (DFT), lo que provoca la dispersión de energía hacia frecuencias adyacentes en lugar de concentrarla en las frecuencias originales, como se puede observar en la Figura 9. Cuando se utilizan tramas de análisis muy pequeñas (como el caso de 128 muestras), se generan más fugas en comparación con tramas más grandes, como la de 4096 muestras, que presentan muchas menos fugas. Para mitigar estos efectos, se aplica una ventana que suaviza las discontinuidades en los bordes de cada trama. La elección de la ventana es crucial, ya que determina el equilibrio entre la resolución en frecuencia y la atenuación de los lóbulos secundarios, es decir, las fugas.

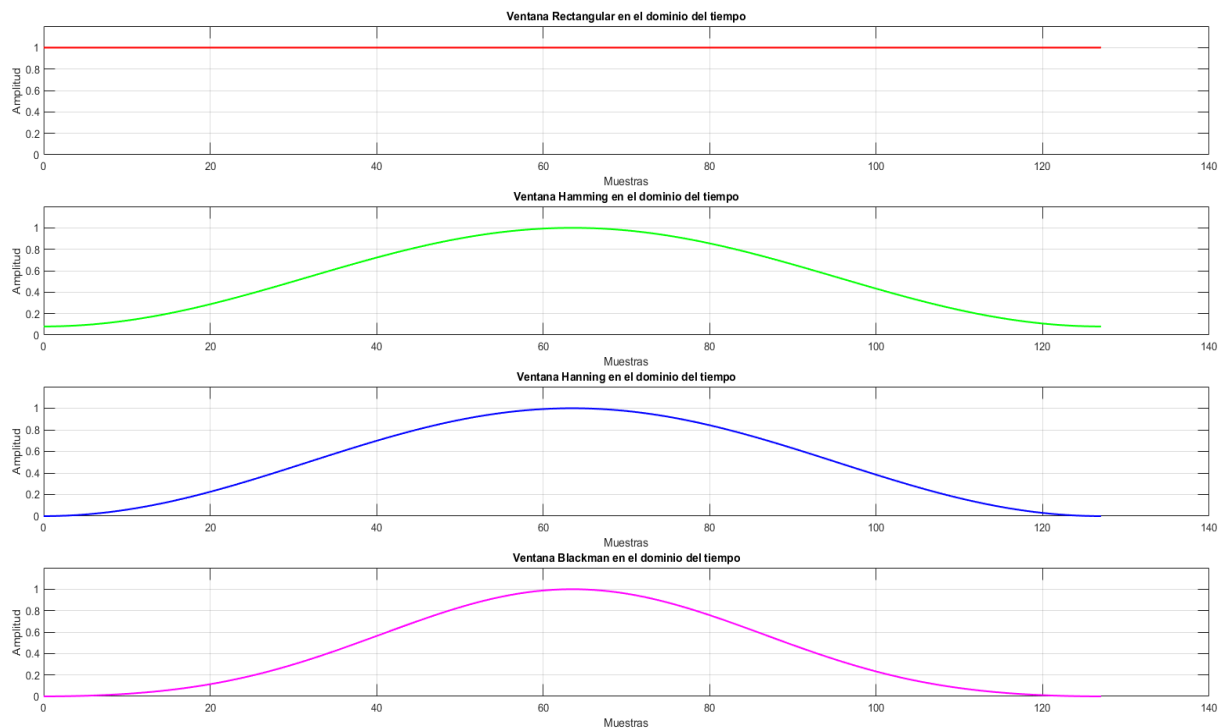


Figura 4-22: Distintos tipos de ventanas utilizadas para paliar los efectos de borde para las tramas

Sin embargo, existe un compromiso importante al seleccionar una ventana. Si bien las ventanas más agresivas, como la de Blackman, son efectivas para reducir los lóbulos secundarios, también aumentan el ancho del lóbulo principal, lo que a su vez disminuye la resolución en el dominio de la frecuencia. Esto significa que las frecuencias cercanas pueden no distinguirse adecuadamente.

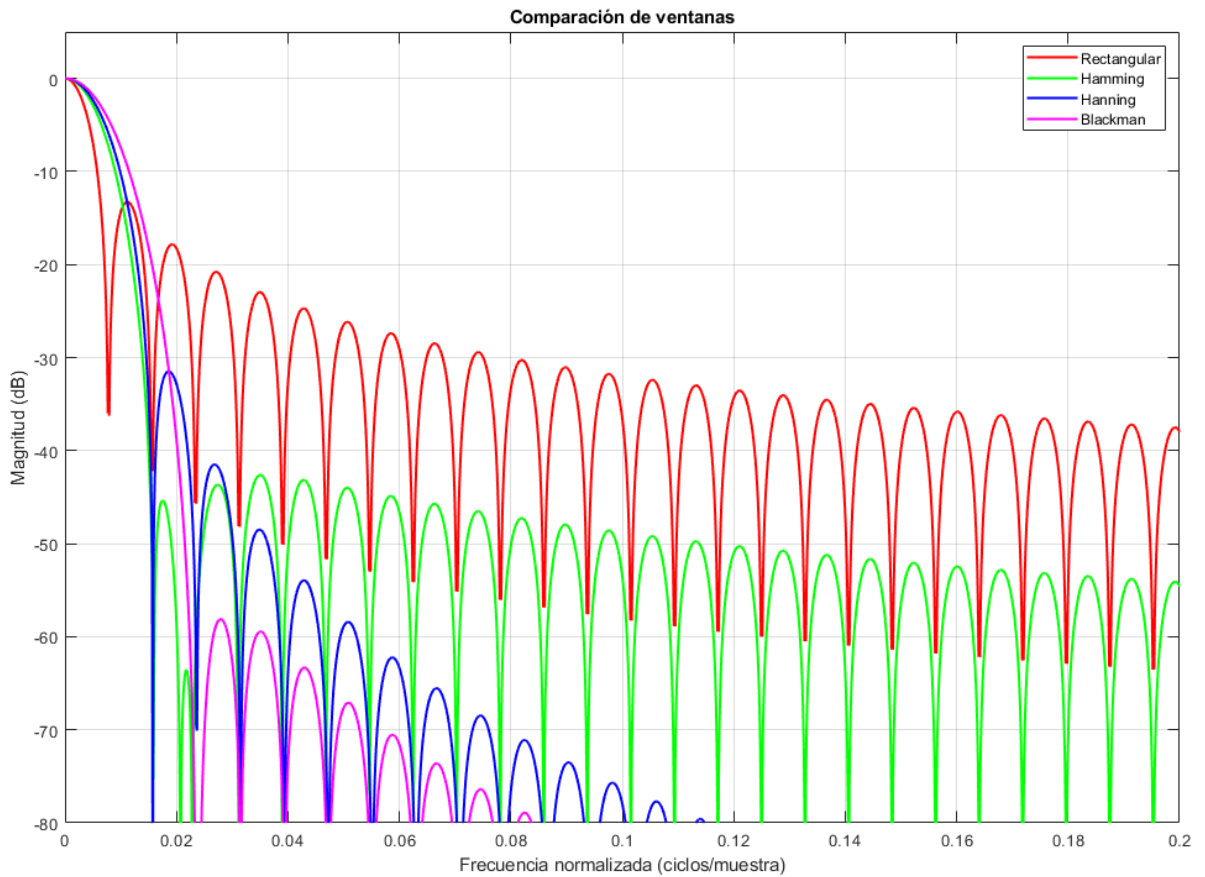


Figura 4-23: Ventanas de la figura 10 en el dominio de la frecuencia, donde podemos ver que las ventanas más agresivas reducen más los lóbulos secundarios, pero tienen un lóbulo principal mucho más ancho.

En contraste, ventanas más simples, como la rectangular, conservan una mejor resolución frecuencial gracias a su lóbulo principal más estrecho, pero presentan lóbulos secundarios más prominentes, lo que puede introducir fugas no deseadas en el espectro. Por lo tanto, la elección de la ventana adecuada depende del equilibrio necesario entre la reducción de fugas espectrales y la resolución frecuencial requerida para el análisis. Explorando un poco la idea de la resolución espectral, si tenemos una frecuencia de muestreo  $f_s$  y *enventanamos* la señal en tramas de  $N$ , a cada muestra le corresponderá una resolución en frecuencia en concreto, si queremos que entre muestra y muestra haya 1Hz de resolución deberemos de tener 0.5 Hz por muestra. En forma de ecuación se expresa como:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \tag{145}$$

Esto significa que para obtener una mejor resolución en frecuencia (más precisa, con detalles más finos), necesitamos aumentar el valor de  $N$  (es decir, usar ventanas más largas). Sin embargo, esto tiene un coste en la resolución temporal.

#### 4.8.3 Ejemplo práctico

Supongamos que tenemos una frecuencia de muestreo  $f_s=1280$  Hz y que utilizamos una ventana de tamaño  $N=128$ . Entonces, la resolución espectral sería:

$$\Delta f = \frac{1280}{128} = 10 \text{ Hz}$$

En el caso de la ventana rectangular, la resolución espectral se define por el ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana. Lo que significa que la mínima diferencia de frecuencia que podemos distinguir en el espectro es de 20 Hz, que corresponde a dos veces la resolución espectral (el ancho del lóbulo principal).

Por otro lado, la ventana Hanning tiene una resolución espectral más baja en comparación con la ventana rectangular, ya que su lóbulo principal es más ancho. Sin embargo, ofrece menos fugas espectrales, lo que mejora la concentración de la energía en las frecuencias originales. En este caso, la mínima diferencia de frecuencia que podemos distinguir es 4 veces la resolución espectral, lo que equivale a 40 Hz.

La ventana Hanning tiene una resolución espectral similar a la de la ventana Hamming, pero con lóbulos laterales ligeramente más pequeños. Aunque la mínima diferencia de frecuencia sigue siendo 4 veces la resolución espectral (aproximadamente 40 Hz), la reducción de las fugas es aún más eficiente.

Finalmente, la ventana Blackman tiene la mayor atenuación en los lóbulos secundarios, pero su lóbulo principal es mucho más ancho, lo que resulta en una resolución espectral aún más baja. En este caso, la mínima diferencia de frecuencia que podemos distinguir es 6 veces la resolución espectral, es decir, aproximadamente 60 Hz. Esto significa que se requiere un mayor intervalo entre frecuencias para distinguirlos, pero con una menor fuga espectral. Veamos un ejemplo de dos señales monocromáticas de 108 Hz y 128 Hz, sobre la misma frecuencia de muestreo de 1280 Hz y una ventana de 128 muestras.

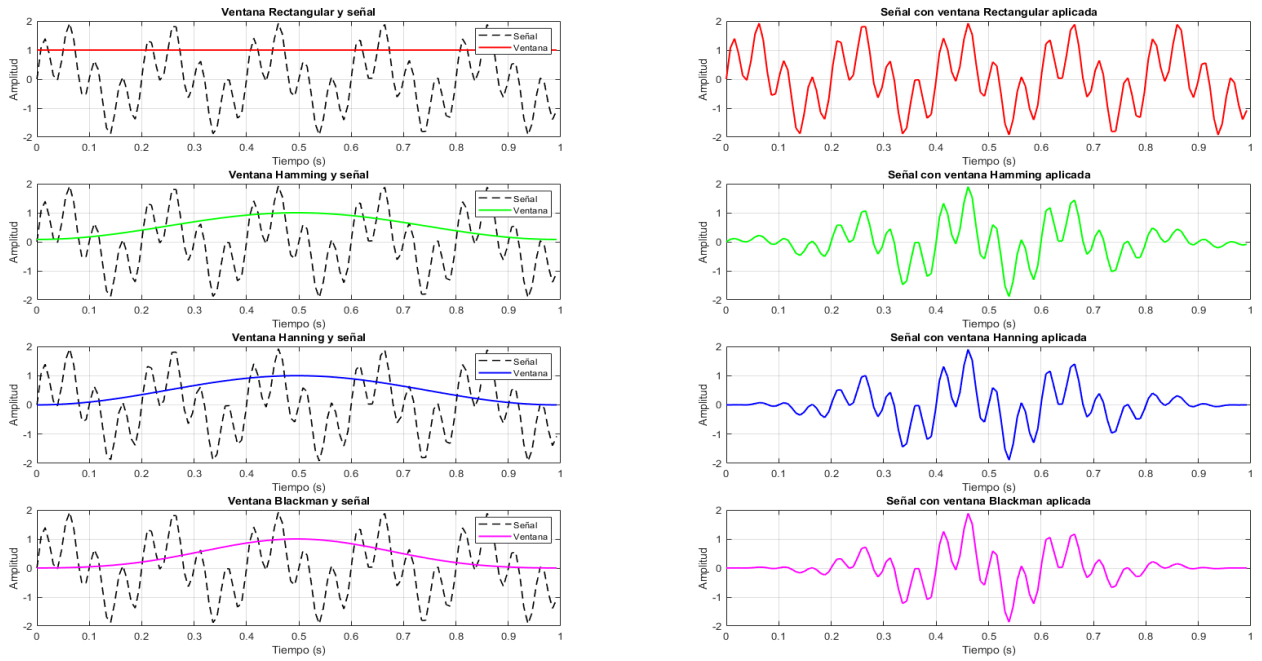


Figura 4-24: Señal con dos tonos de 128 Hz y 108 Hz (en línea discontinua) procesada por las distintas ventanas vistas anteriormente y sus resultados (en los gráficos de la derecha)

Al ser dos tonos de 100 Hz y 128 Hz necesitaremos una resolución de unos 20 Hz, por ello solo nos lo detectara una ventana rectangular. El resto de las ventanas no serán capaces de detectar los dos armónicos

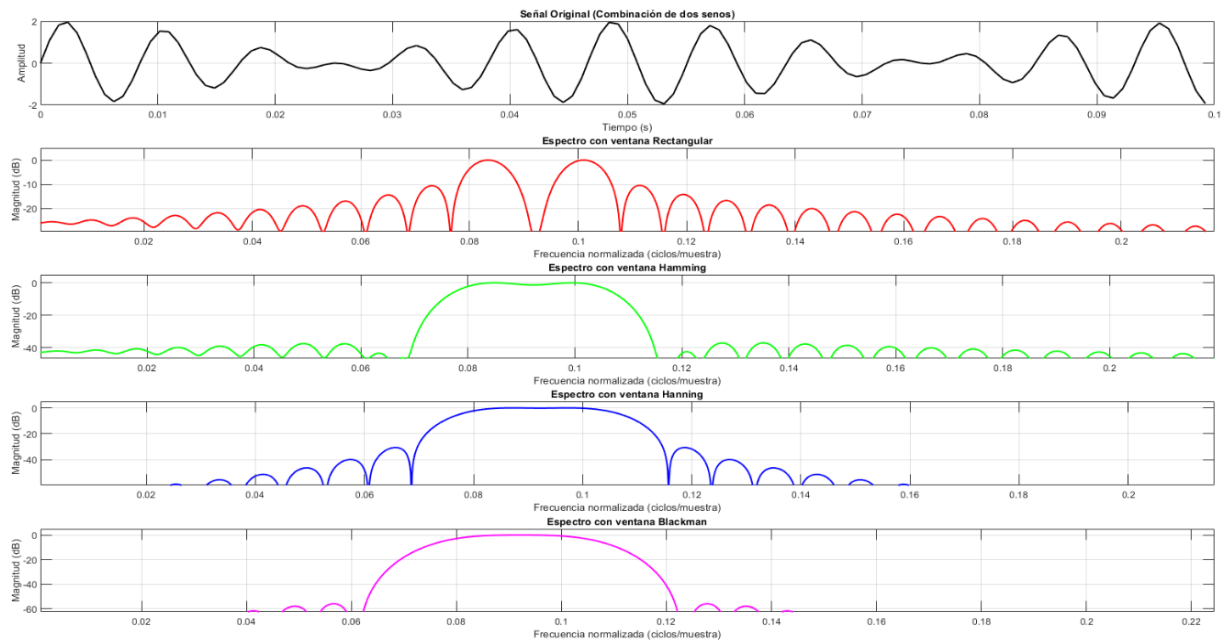


Figura 4-25: Espectro de la señal con dos tonos de 128 Hz y 108 Hz en base a distintas ventas y como la rectangular es la única en diferenciar las dos frecuencias, aunque con más fugas. La notación de “ciclos por muestra” nos indica la frecuencia normalizada que le corresponde a cada muestra, es decir, 0.1 ciclos/muestra a una frecuencia de muestreo de 1280 Hz. Significa que a esa muestra tiene una frecuencia de  $0.1 \cdot 1280 = 128$  Hz

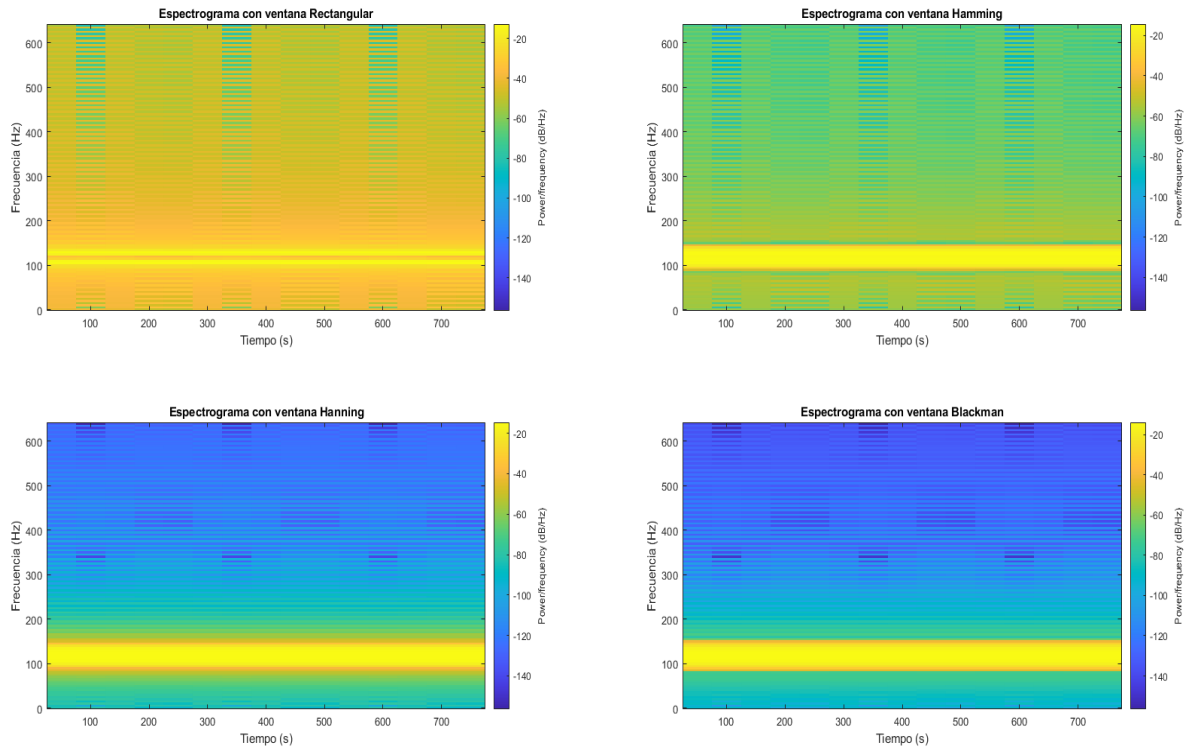


Figura 4-26: Espectrogramas de la señal de dos 128 Hz y 108 Hz con distintas ventanas, donde se ve que la ventana rectangular es la única capaz de detectar ambos tonos

Otro aspecto clave a destacar en este tipo de procesamiento es el solapamiento. En nuestro caso, hemos elegido un solapamiento de  $N/2$ . El solapamiento o superposición consiste en solapar parcialmente las ventanas entre sí. Si las ventanas fueran completamente independientes (sin superposición), podrían generarse discontinuidades o pérdida de información entre los segmentos, lo que resultaría en una resolución espectral y temporal limitada. El solapamiento de  $N/2$  muestras (siendo  $N$  la longitud de la ventana utilizada) aseguran que la información relevante no se pierda entre segmentos y que el análisis espectral sea más coherente a lo largo del tiempo.

## 4.9 Uso de la interfaz y su funcionamiento

El principal objetivo de esta interfaz es que el alumnado en cuestión pueda grabar su propia voz y que pueda simular cómo se transmite por una línea de transmisión, la cual habrá definido previamente. Para hacerlo lo más intuitivo, se han dejado elementos de la primera, como es el caso de la calculadora de inductancia distribuida para cumplir la condición de Heaviside. Por otro parte se han añadido nuevas funciones que nos permitirán configurar tanto el tamaño de la ventana como el tipo de ventana a utilizar para configurar la SFTF.

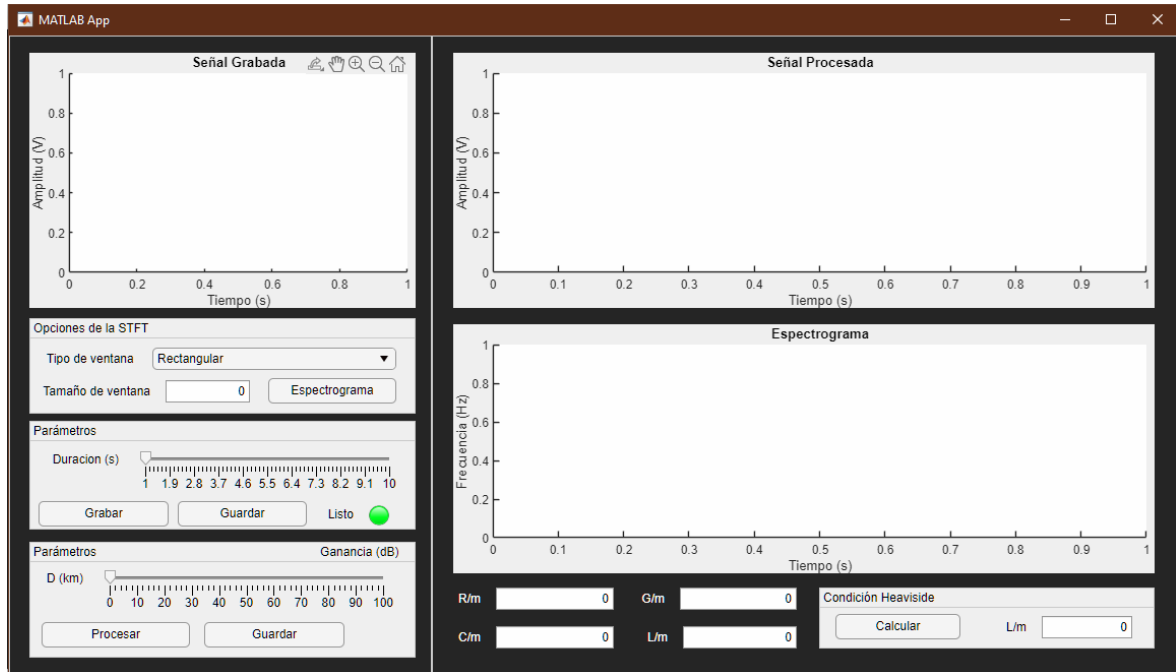


Figura 4-27: Aplicación encargada de procesar señales aleatorias. En la esquina inferior izquierda tenemos los paneles de control y su derecha los paneles de los parámetros de la línea

En lo que respecta a la interfaz podemos diferenciarla en tres partes.

### Paneles de Configuración

- El usuario puede ingresar los valores correspondientes a los parámetros distribuidos de la línea, como resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia por unidad de longitud, además de la distancia deseada para la línea.
- Es posible ajustar la duración de la grabación de la señal de voz.
- En caso de que la señal resultante, después de haber sido procesada, sea muy pequeña, se normaliza la señal. Esto garantiza que, al guardar el audio de la señal, el usuario pueda escucharla a un nivel óptimo, sin necesidad de recurrir a programas externos para amplificarla.



## Gráfico de Visualización de Señales

- Se presentan dos gráficos en los que se pueden observar tanto la señal de voz original grabada como la señal procesada. Además, ambos gráficos pueden guardarse, como se muestra en la figura 7.
- Se ha incorporado un espectrograma configurable que se puede ajustar según las preferencias del usuario, utilizando las opciones de la STFT. Entre las configuraciones disponibles se encuentran el tamaño de la ventana y el tipo de ventana, temas ya comentados previamente.

Al iniciar la aplicación, todos los parámetros se establecen en 0 de forma predeterminada. Para este ejemplo, utilizaremos los siguientes valores predefinidos para una línea de transmisión definidos previamente en el anexo de línea pares y que se han usado en la interfaz anterior. En el caso de que pongamos todos los valores a 0, obtendremos la misma señal que a la entrada

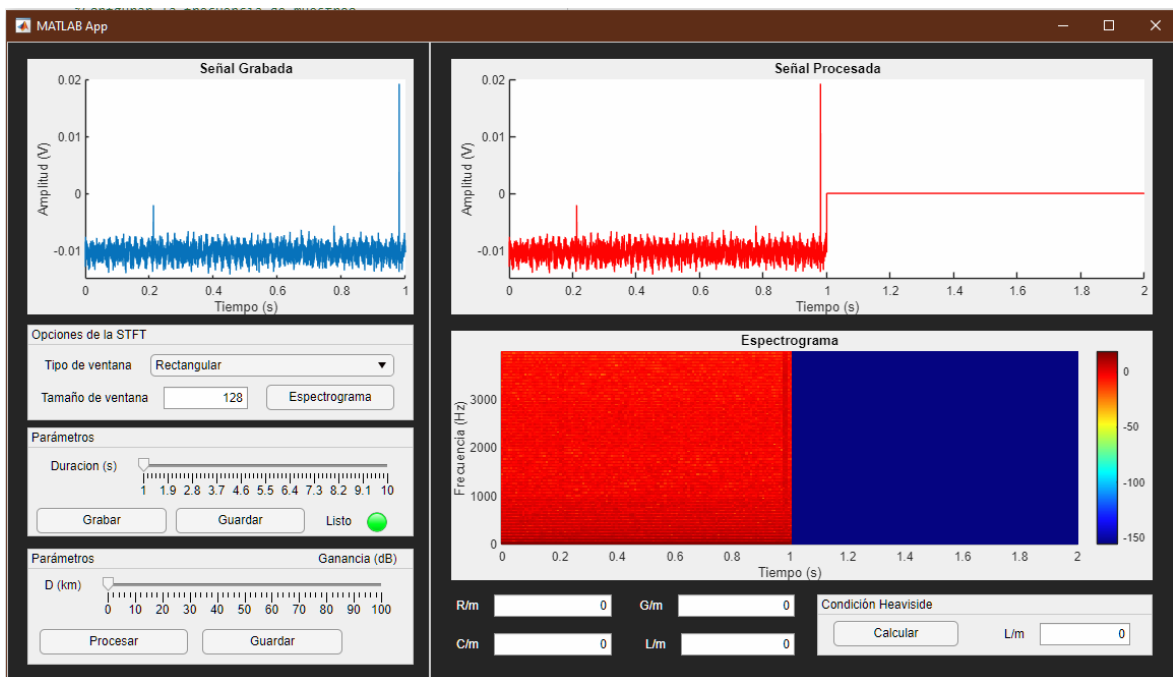


Figura 4-28: Ruido captado por el micrófono durante un 1s, con un tamaño de ventana de 128 muestras y una ventana de tipo rectangular

Una vez obtenemos el resultado, vemos como la señal de salida es el resultado de la convolución de la respuesta al impulso del sistema, más la señal que estamos grabando. Para centrarnos en la parte de señal que tiene relevancia, bastara con hacer zoom con las herramientas del gráfico de Matlab y volver a procesar el espectrograma “botón espectrograma”

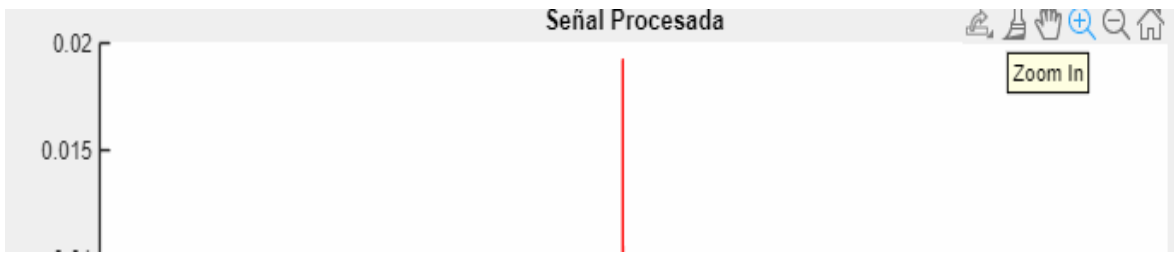


Figura 4-29: Aplicamos zoom en el gráfico en la zona de interés a través de la herramienta de “zoom” de Matlab.

Tras aplicar el zoom, la señal que vemos en el gráfico de “Señal Procesada”, es la señal que vamos a coger para hacer el espectrograma y la señal que vamos a coger para posteriormente guardarla en un fichero de audio.

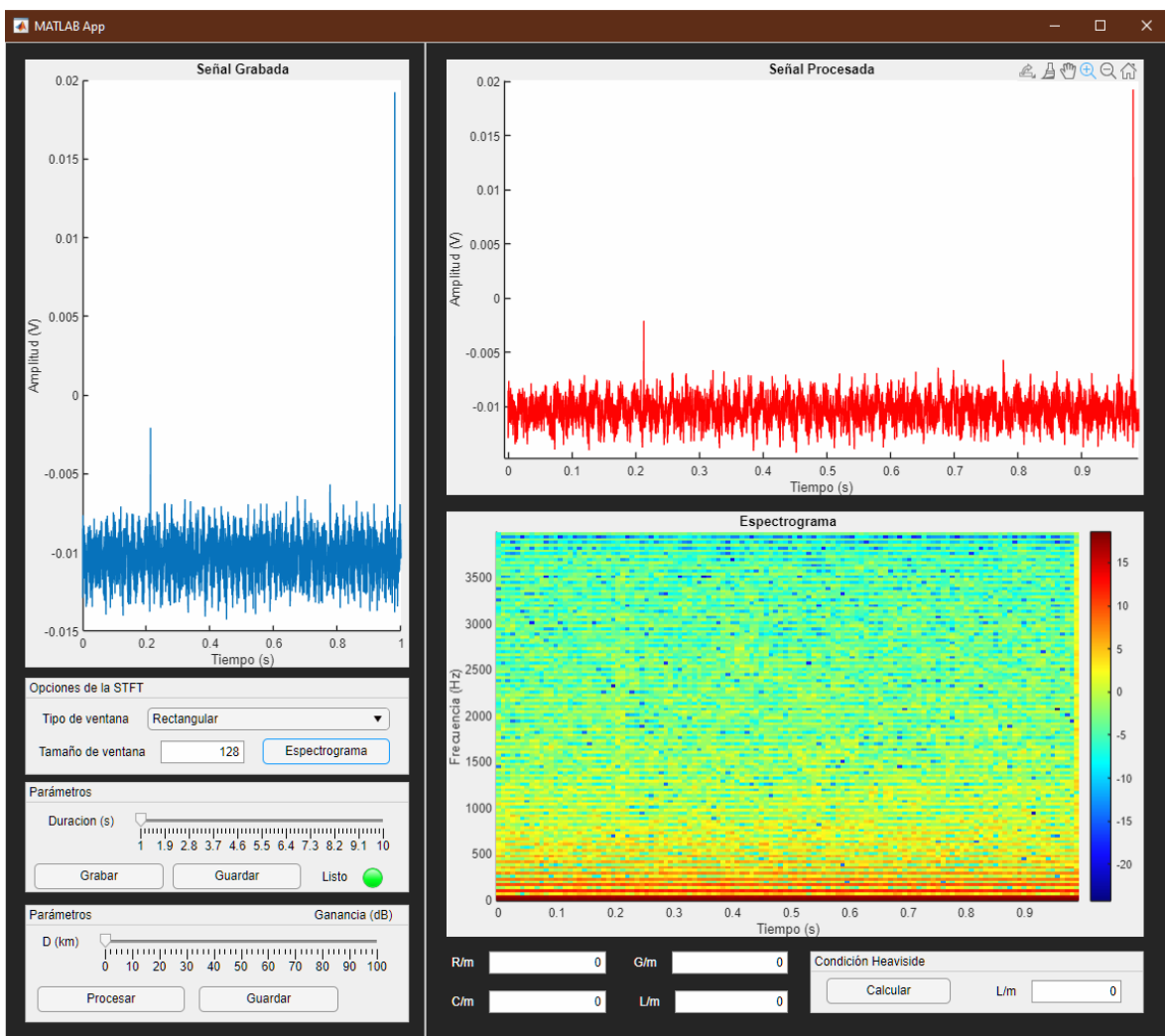


Figura 4-30: Ruido captado anteriormente por el micrófono, con el zoom aplicado en la zona de interés de la señal. La simulación tiene los mismos parámetros que los que se muestran en la figura 4-29

Cabe destacar que el tamaño de la ventana siempre será ajustado por el programa al entero más próximo que sea una potencia de 2, independientemente del número que introduzcamos. Aclarado este punto, nos centraremos en el caso de estudio de una señal sonora. Para ello, realizaremos una grabación de 5 segundos, que luego procesaremos utilizando una ventana Hamming de 256 muestras. Evidentemente, se emplearán los parámetros de línea previamente mencionados. Cuando se inicie la grabación el piloto de “listo” cambiara al color rojo, cuando esta finalice el piloto cambiara al color verde

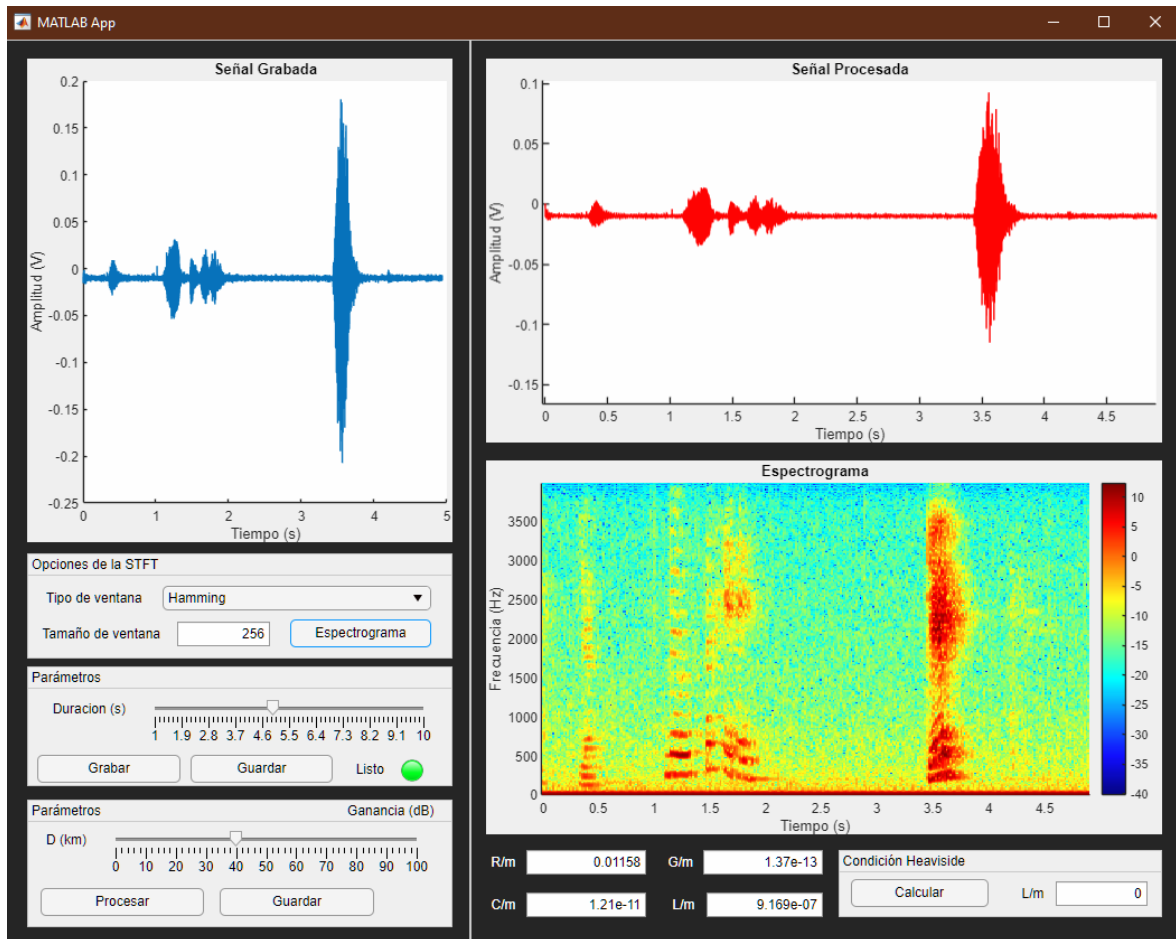


Figura 4-31: Señal de voz transmitida por una línea de pares a una distancia de unos 40km

Como se puede observar, la señal obtenida presenta una amplitud ligeramente reducida. Para solucionar este problema, y como se mencionó anteriormente, la señal que se almacenará se normaliza para evitar un volumen demasiado bajo al reproducir la grabación. De este modo, no será necesario recurrir a programas externos, como Audacity, para amplificar el audio. La señal que se guardará es la que se muestra en el gráfico. La señal original se guarda tal como se grabó, incluso si se realiza zoom en el gráfico. Además, para garantizar una reproducción adecuada, la señal de audio también se normaliza

Una vez que tengamos nuestra señal de voz procesada, podemos proceder a guardar tanto la señal original (utilizando el botón junto al de grabar) como la señal procesada (con el botón junto al de procesar). Cabe destacar que estos archivos se guardarán en el directorio de trabajo activo en MATLAB, el cual no necesariamente coincide con el directorio donde están almacenadas las aplicaciones creadas en App Designer.



*Figura 4-32: Grabaciones guardadas en el directorio donde se está trabajando con MATLAB*

## 5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El resultado obtenido, figura 5-1, son dos aplicaciones que permiten el estudio de cómo afectan los parámetros de una línea de transmisión sobre varias señales y nuestra propia voz.

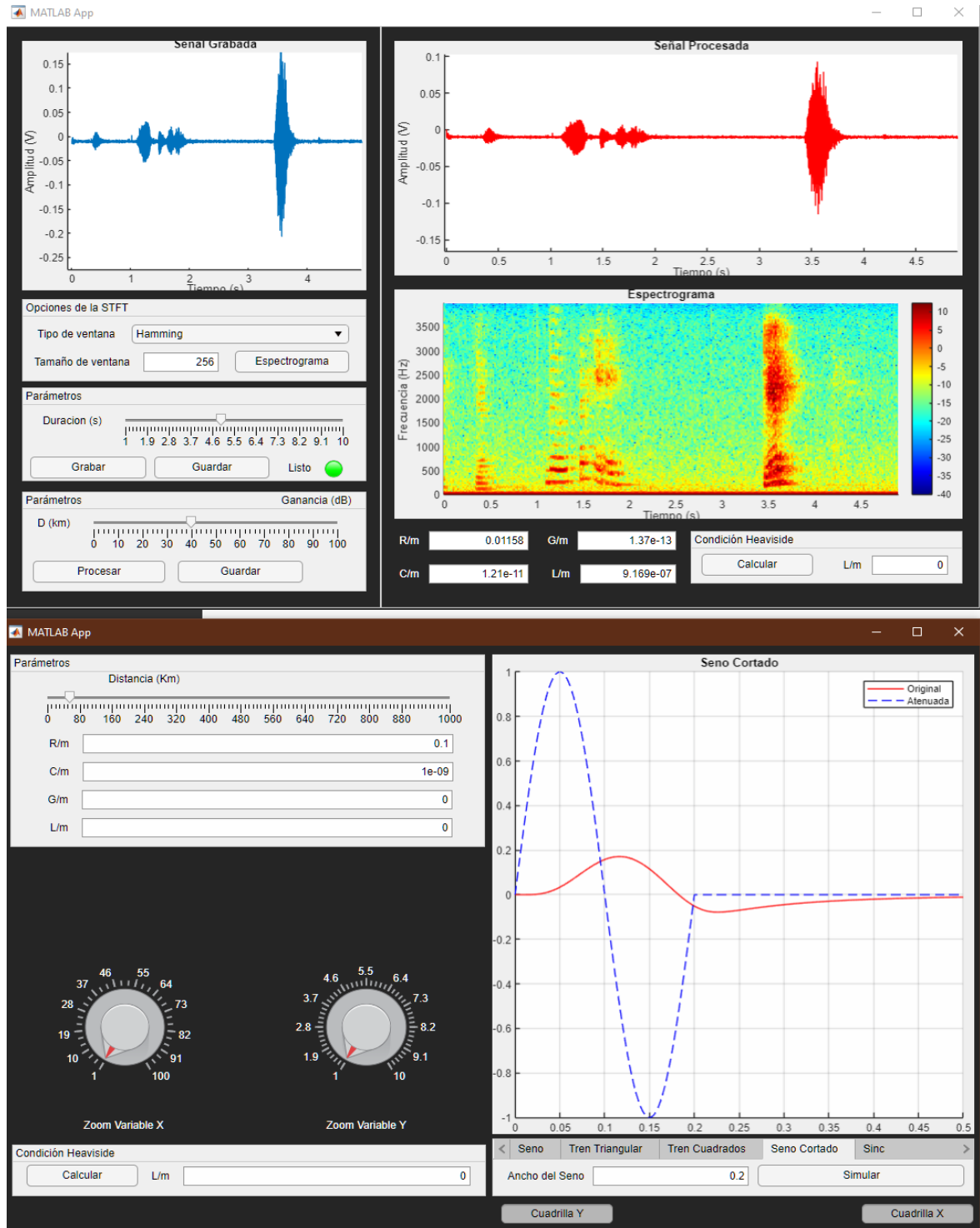


Figura 5-1: Vistas de las dos interfaces

## **5.1 Dificultades encontradas**

Durante el desarrollo de la aplicación surgieron diversas dificultades. La principal fue obtener la respuesta al impulso de las líneas, ya que, al estar en el dominio de la frecuencia, fue necesario aplicarle simetría par. Además, se tuvo que asegurar que las convoluciones circulares coincidieran con las convoluciones lineales.

Otra dificultad fue la creación de las interfaces en App Designer, donde fue necesario optimizar el código. Si se utilizaban vectores demasiado largos, la aplicación a menudo se colgaba. También se estudiaron casos específicos de cada señal, como evitar que la anchura del pulso fuera cero, entre otros aspectos

## **5.2 Posibles Mejoras**

Mejorar el tiempo de procesamiento sería esencial si se pretende utilizar la aplicación en tiempo real. Además, sería recomendable implementarla en un software libre, permitiendo que otros usuarios puedan editarla sin necesidad de una licencia de MATLAB.

## **5.3 Líneas de Futuro**

El futuro de esta aplicación está orientado a ayudar a los estudiantes a comprender mejor la propagación de señales en líneas de transmisión. Además, podría ampliarse para trabajar con señales de alta frecuencia y simular guías de onda, cables coaxiales e incluso tecnologías como el ADSL.

También se podría mejorar el procesamiento de las señales para simular líneas con parámetros más específicos. Esto permitiría un procesamiento capaz de simular retardos y distorsiones más agresivas. Paralelamente, se podría trabajar con un número mucho mayor de muestras para procesar señales de audio de mayor duración.

## 6 ANEXOS

### 6.1 ANEXO I : FOURIER

El estudio de la propagación de señales en líneas de transmisión es un área clave dentro de las telecomunicaciones y la ingeniería eléctrica, ya que permite comprender cómo las señales eléctricas viajan a través de diferentes medios y cómo son afectadas por diversas condiciones físicas. En este anexo trabajaremos con un caso particular de línea de transmisión: aquella cuya conductancia e inductancia son nulas. Esta línea fue estudiada por primera vez por William Thomson en 1855. De hecho, fue el primer trabajo que abordó la propagación de señales eléctricas a largas distancias en conductores y se aplicó a los cables telegráficos submarinos que se tendieron en la segunda mitad del siglo XIX. Tiene la ventaja de poseer soluciones analíticas para algunos casos concretos, como el impulso unitario o el pulso rectangular. Por esa razón fue empleada en este TFG como estudio preliminar con el que trabajar (debido a la facilidad para implementarla). Se trata, en realidad, de un caso particularmente sencillo de la teoría de líneas de transmisión posteriormente completada por Oliver Heaviside, en el que se cumple que:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \quad (146)$$

En el proceso de implementar la teoría de Thomson y la aplicación adecuada de las transformadas de Fourier en el procesamiento de señales, nos basamos en la capacidad de descomponer señales complejas en componentes más simples a través de las transformadas de Fourier, lo que permite una comprensión más detallada y el análisis de fenómenos en el dominio de la frecuencia.

Sin embargo, nos enfrentamos a un problema: el diseño correcto de las transformadas para nuestras señales. El objetivo principal de este anexo es abordar cómo procesar las señales de manera efectiva utilizando las transformadas de Fourier, evitando resultados aislados o inexactos. Por lo tanto, este anexo se centra en proporcionar una guía sobre cómo abordar estos problemas y asegurar que las señales procesadas a través de las transformadas de Fourier reflejen de manera lo más precisa posible la información contenida en las señales. El documento proporcionará un análisis detallado del diseño del algoritmo, considerando tanto la implementación práctica como teórica. Además, se discutirá cómo los resultados

obtenidos se alinean con la teoría y qué ajustes son necesarios para mejorar la precisión y fiabilidad del análisis, dentro de las limitaciones de los sistemas discretos.

A través de ejemplos prácticos y la visualización de resultados, este anexo tiene como objetivo no solo ilustrar el uso de las transformadas de Fourier en el contexto de la teoría de Thomson, sino también ofrecer soluciones efectivas a los problemas encontrados durante el desarrollo del algoritmo.

### 6.1.1 Generación y Análisis de la Señal

En este capítulo, se describe el proceso de generación de la señal original y la aplicación de la Transformada de Fourier para su análisis en el dominio de la frecuencia. Como primer ejemplo, la señal que vamos a analizar es un pulso rectangular, que se caracteriza por su alta riqueza espectral, además de que en el tiempo vamos a poder visualizar mejor la atenuación y el desfase provocado por las líneas de transmisión.

```
% Definimos los parámetros
fs = 44100;
T = 10;
t = 0:1/fs:T; % Vector de tiempo

% Generamos la señal
x = [10.*ones(1,length(0:1/fs:0.1)), zeros(1,length(0.1:1/fs:(T-1/fs)))]';
X_TCT = fft(x);
```

Figura 6-1: Código de MATLAB empleado para generar la señal analizar, en nuestro caso, es un pulso cuadrado que tiene un pulso de duración de 0.1s y una duración de 10s

En la Figura 6.1 se muestra la definición de una frecuencia de muestreo comúnmente utilizada en la industria de la música digital, que es de 44,100 Hz, como la empleada en los Compact Discs (CD). Esta frecuencia de muestreo es estándar en la producción de audio digital debido a su capacidad para capturar la mayoría de las frecuencias audibles con alta fidelidad. Además, la duración de la señal se ha establecido en 10 segundos. Estos dos parámetros, frecuencia de muestreo y duración, son fundamentales para la calidad y precisión de nuestra simulación. Estos marcarán el baremo entre obtener resultados precisos o una simulación que sea meramente representativa o simbólica. La correcta configuración de estos parámetros es crucial para lograr una simulación fiel, despreciando el coste computacional obviamente, que más adelante veremos en más detalle



```

% Calculamos el vector de frecuencias
N = length(X_TCT);
frequencies_hz = (0:N-1)*(fs/N); % Vector de frecuencias en Hz
frequencies_rad = frequencies_hz * 2*pi; % Vector de frecuencias en rad/s

```

*Figura 6-2: Tras hacer la transformada de Fourier de la señal de entrada, pasamos a obtener su vector de frecuencias, donde obtendremos el valor en frecuencia de cada muestra.*

Una vez que hemos definido nuestra señal  $x[n]$  con  $N$  muestras, su transformada de Fourier  $x[k]$  nos proporciona una representación en el dominio de la frecuencia. Este paso es esencial para aplicar la teoría de Thomson, que requiere la consideración de cómo cada frecuencia afecta a la señal. Para realizar este análisis correctamente, debemos entender la correspondencia entre las muestras de la señal en el dominio del tiempo y sus componentes frecuenciales en el dominio de la frecuencia. Cuando aplicamos la Transformada de Fourier a una señal  $x[n]$ , obtenemos un conjunto de valores  $x[k]$  que representan las amplitudes y fases de las componentes frecuenciales de la señal. Sin embargo, para interpretar estos valores correctamente y aplicar la teoría de Thomson, es crucial determinar qué frecuencia corresponde a cada componente de la transformada.

```

% Atenuaciones
RC = 3e-7;
alpha = sqrt(0.5 * RC * 2 * pi * frequencies_hz);
beta = sqrt(0.5 * RC * 2 * pi * frequencies_hz);
k = 500;

% Espectros
X_TCT_atenuado = X_TCT .* exp(-alpha .* k) .* exp(-1i*beta*k);

```

*Figura 6-3: Sacamos la respuesta al impulso de nuestro sistema en frecuencia y luego la multiplicamos por la transformada de la señal original*

Para aplicar la teoría de Thomson, necesitamos calcular y aplicar factores de atenuación y retardo para cada componente frecuencial. Estos factores dependen de la frecuencia asociada con cada componente. La atenuación y el retardo se calculan utilizando la teoría de Thomson

La correcta correspondencia entre las muestras en el dominio del tiempo y las frecuencias en el dominio de la frecuencia es crucial para aplicar correctamente la teoría de Thomson. Al calcular y aplicar factores de atenuación y retardo específicos para cada frecuencia, podemos modificar y analizar la señal de manera precisa.

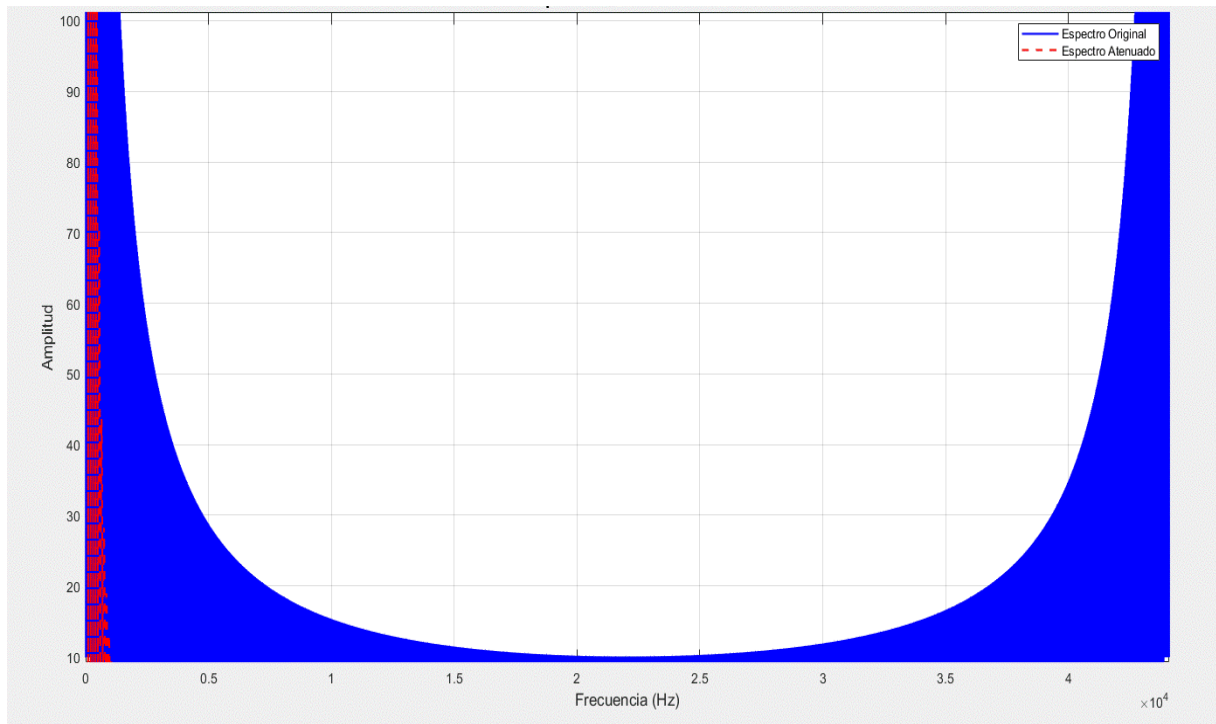


Figura 6-4: Espectro obtenido al multiplicar la señal original con su respuesta al impulso del sistema evaluada para  $k=500$  km y  $RC = 3e-7$ . Con una frecuencia de muestreo de 44100 Hz. La Amplitud tiene unidades de voltio

Al observar el espectro obtenido tras aplicar la propagación de la señal a través de las líneas de pares, podemos notar que hemos perdido prácticamente toda la información contenida en las componentes de alta frecuencia, como se aprecia en la figura correspondiente. Este resultado era previsible, ya que estamos trabajando con una línea de transmisión de alta dispersión, lo que implica que, a medida que aumentamos en frecuencia, la dispersión de la señal se intensifica. Esto se traduce en una atenuación significativa de las componentes de mayor frecuencia, afectando la transmisión y la calidad de la señal. Por otra parte, la dispersión introduce un retardo dependiente de la frecuencia, provocando que las ondas de mayor frecuencia sufran más distorsión y, en muchos casos, se atenúen casi por completo.

Sin embargo, al analizar el espectro obtenido en el dominio frecuencial, debemos recordar que la Transformada de Fourier para señales reales tiene una propiedad fundamental conocida como simetría par. Esta propiedad establece que la información contenida en las frecuencias positivas tiene su reflejo exacto en las frecuencias negativas (o "frecuencias espejo"). Por lo tanto, es sorprendente observar que parte de la información de nuestra señal propagada no aparece reflejada en estas frecuencias espejo.

Para comprender mejor este fenómeno de las frecuencias espejo y visualizar con mayor claridad qué ocurre con los lóbulos secundarios de nuestra señal, vamos a realizar una segunda simulación. En este caso, utilizaremos una frecuencia de muestreo más baja, lo que nos permitirá observar más claramente cómo la energía se distribuye tanto en las frecuencias principales como en las frecuencias espejo.

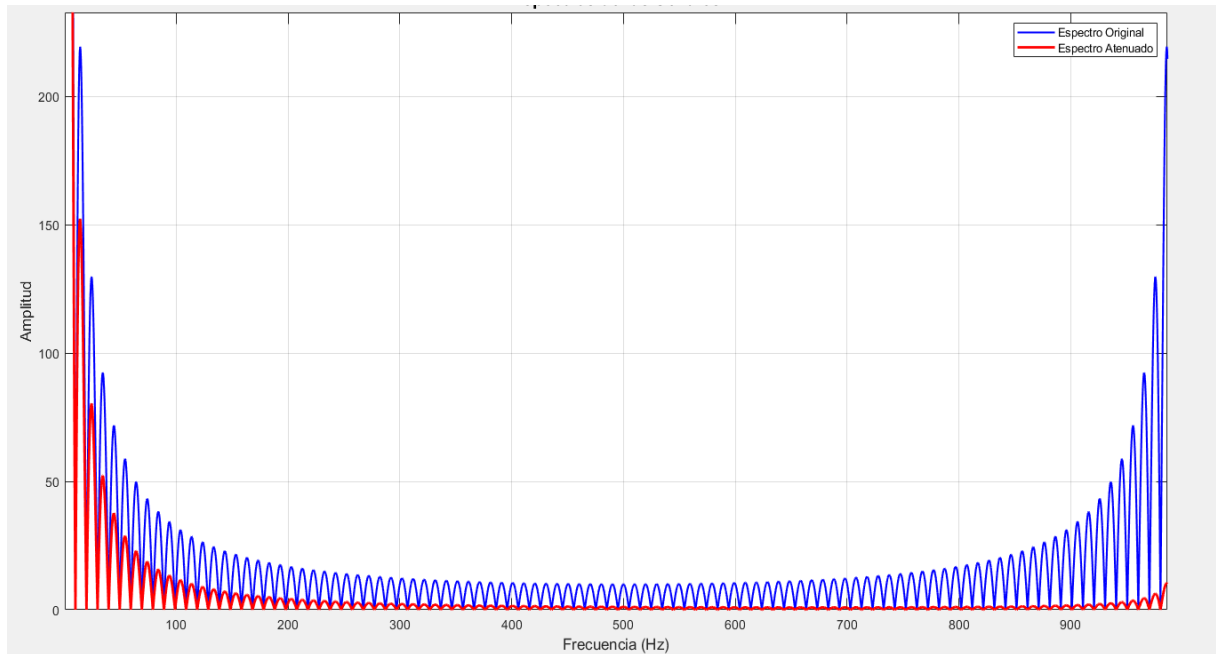


Figura 6-5: Espectro obtenido al multiplicar la señal original con su respuesta al impulso del sistema evaluada para  $k=500$  km y  $RC=3e-7$ . Con una frecuencia de muestreo de 1000 Hz. La Amplitud tiene unidades de voltio

En la Figura 6.5, podemos observar claramente que la señal atenuada por la línea de transmisión no presenta frecuencias espejo ni exhibe la propiedad de simetría par en su Transformada de Fourier. Este fenómeno es fácil de diagnosticar, ya que el espectro de la señal alcanza únicamente hasta  $f_s/2$  (aproximadamente 500 Hz en este caso), y más allá de este punto (en las denominadas "frecuencias espejo"), no se encuentra ninguna información significativa.

La razón detrás de esta ausencia de simetría es que, al aplicar el factor de atenuación, continuamos disminuyendo las componentes frecuenciales más allá de  $f_s/2$ , cuando en realidad lo que deberíamos hacer es replicar la señal en las frecuencias espejo para mantener la simetría en la Transformada de Fourier de señales reales. Esta falta de replicación resulta en una representación espectral incompleta, lo que afecta la integridad de la señal en el dominio temporal. Para entender mejor este comportamiento y el error resultante, en el próximo capítulo analizaremos un ejemplo sencillo que nos permita visualizar las interpretaciones erróneas que pueden surgir.

### 6.1.2 Impacto de la Ausencia de Simetría en la Transformada de Fourier

En este capítulo consideraremos una señal  $x[k]$ , continua en todo el espectro, evidentemente con su simetría. A través de ella podemos definir una nueva señal en el dominio espectral,  $y[k]$ . Esta relación, como hemos visto en anteriormente se puede definir como:

$$y[k] = \begin{cases} x[k] & k \leq N/2 - 1 \\ 0 & N/2 < k \leq N - 1 \end{cases} \quad (147)$$

Siendo  $N$  la longitud en muestras de la señal original y el intervalo de  $N/2$  a  $N-1$  muestras el intervalo en el dominio espectral que corresponden a las frecuencias espejo. Aplicando la definición de la anti transformada de Fourier obtenemos:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} y[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} y[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \right] \quad (150)$$

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} 0 * e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \right] \quad (151)$$

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} + 0 \right] \quad (152)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad (153)$$

Tras estos pasos lo que hacemos es un cambio de variable, para que no sea más fácil la interpretación de la transformada. Donde  $m$  sea igual a:  $m = \frac{N}{2}$   $N = 2m$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{2m} n} \quad (154)$$

Si nos damos cuenta tenemos la definición de una anti transformada de Fourier, pero evaluada en solos puntos  $n/2$ , de esta manera podemos relacionar las señales  $y[n]$  y  $x[n]$  entre sí, de tal manera que nos queda:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} x[k] e^{j2\pi \frac{k}{m} \left(\frac{n}{2}\right)} \right] = \frac{1}{2} x \left( \frac{n}{2} \right) = y(n) \quad (155)$$

$$x(n) = 2 y(2n) \quad (156)$$

De esta forma, podemos relacionar las señales  $y[n]$  y  $x[n]$  entre sí, y obtenemos que nuestra nueva señal  $y[n]$  puede ser obtenida a partir de  $x[n]$ . Para ello todo este desarrollo matemático es implementarlo en Matlab:

El código analiza una señal discreta transformándola a dominio de la frecuencia y atenuando ciertos componentes. Luego, aplica la anti transformada para obtener las señales en el dominio del tiempo. Finalmente, se simulan los espectros y las señales en el tiempo

```
%% Relacion de x(n) y(n)
x_n = [10 0 10 0 10 0 0 10 0 10 0 0 10 10 0 10];

% Definicion de las transformadas
x_k = fft(x_n);
x_k2 = x_k;
x_k2(10:16) = 0;
figure;
subplot(2,1,1), stem(abs(x_k)),
hold on, stem(abs(x_k2))
legend('Espectro Original', 'Espectro Atenuado');
hold off

% Definicion de las antitransformadas
y_n = ifft(x_k);
y_n2 = ifft(x_k2);
subplot(2,1,2),
hold on, plot(real(y_n))
plot(real(y_n2))
legend('Señal Original', 'Señal sin espejo');
```

*Figura 6-6: Código empleado para demostrar que cuando una transformada de Fourier de las muestras de  $N/2$  a  $N-1$  de valor nulo (sin espejo), su señal en el tiempo sufre en reescalado en la amplitud de  $1/2$ . La Amplitud tiene unidades de voltio*

Al observar las imágenes generadas en los gráficos de la figura 6-7 se puede apreciar claramente que ambas señales, la original y la que ha sido procesada para eliminar las frecuencias espejo, presentan la misma forma.

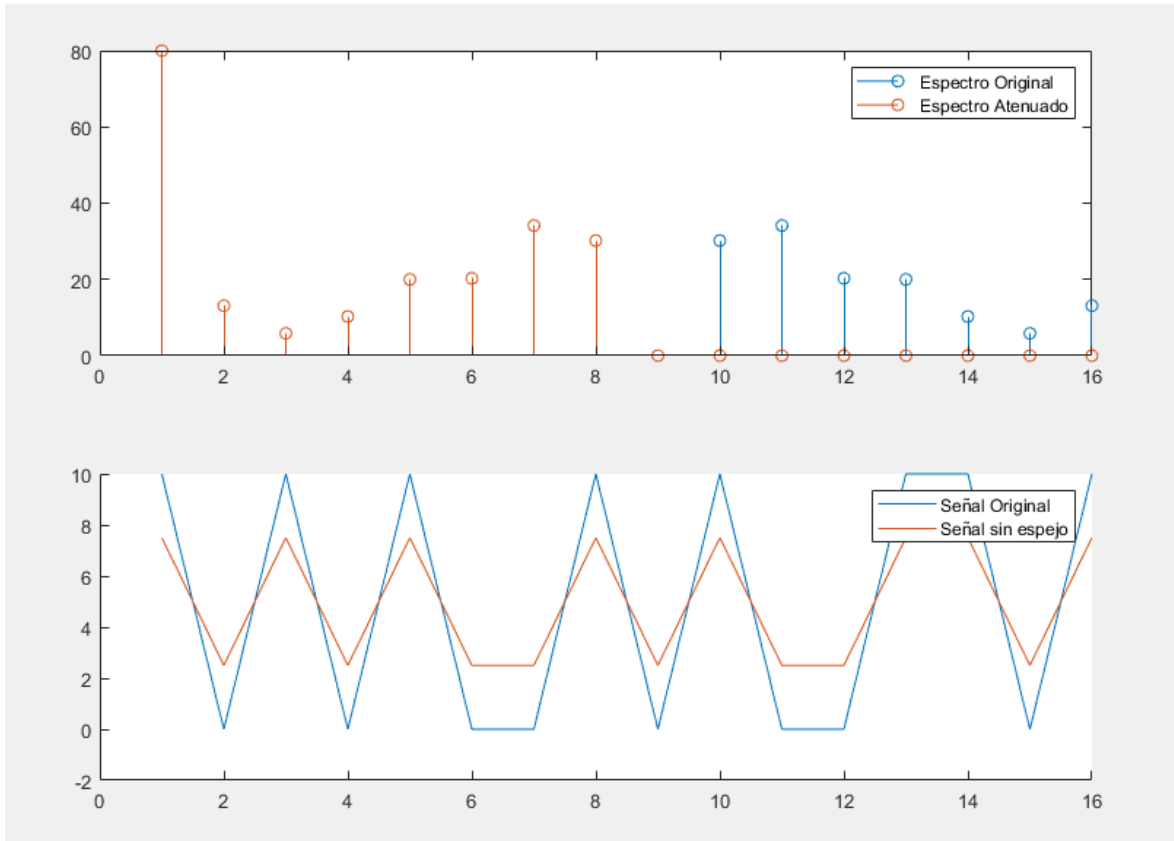


Figura 6-7: En el Gráfico superior podemos ver el espectro de las dos señales, mientras que en el gráfico inferior podemos observar las dos señales en el dominio temporal, además del reescalado de  $\frac{1}{2}$  que sufriría la señal.

Al observar las imágenes generadas en los gráficos se puede apreciar claramente que ambas señales, la original y la que ha sido procesada para eliminar las frecuencias espejo, presentan la misma forma. Esta similitud en la forma sugiere que, aunque hemos eliminado las componentes espectrales en el intervalo de las frecuencias espejo, la estructura fundamental de la señal no se ha alterado. La única diferencia notable entre ambas señales es su escala. Al eliminar las frecuencias espejo, se produce una reducción en la amplitud general de la señal reconstruida, además de un desfase en el eje de amplitud. Sin embargo, este problema se puede resolver de manera sencilla mediante un reescalado de la señal. Al aplicar un factor de reescalado a la señal sin frecuencias espejo, podemos obtener una señal completamente equivalente a la original en términos de su amplitud y forma.

A decir verdad, no todos los problemas se resuelven en este punto. Si realizamos una simulación con una frecuencia de muestreo aún más baja, con el objetivo de observar menos lóbulos secundarios de nuestra señal en el dominio espectral, nos encontramos con un fenómeno adicional: el espectro de nuestra señal propagada no termina de extinguirse en el intervalo de  $f_s/2$  (la mitad de la frecuencia de muestreo). En lugar de ello, persiste por un rango de frecuencias mayor y tarda significativamente más en extinguirse. La figura que presentamos a continuación ilustra esta situación, mostrando cómo el espectro de la señal no termina de extinguirse como debería, sino que continúa extendiéndose mucho más allá de  $f_s/2$ .

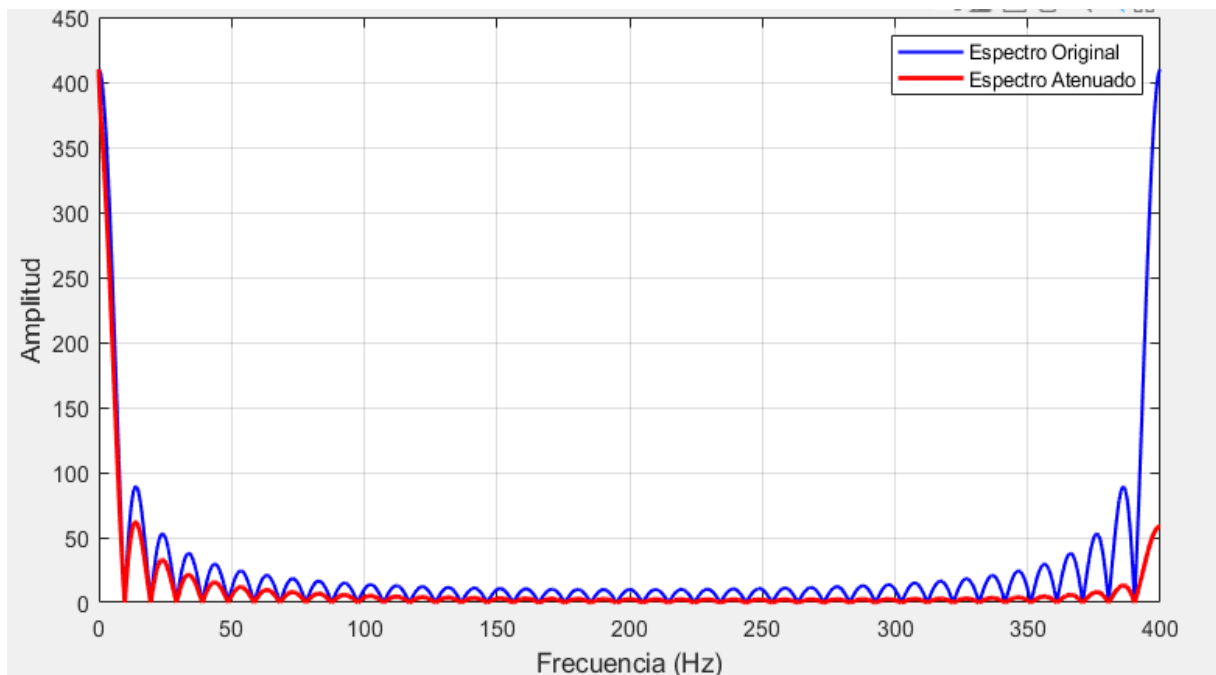


Figura 6-8: Espectro obtenido al multiplicar la señal original con su respuesta al impulso del sistema evaluada para  $k=500 \text{ km}$  y  $RC = 3e-7$ . Con una frecuencia de muestreo de 400 Hz, con el fin de captar que la atenuación de la frecuencias no se detiene en  $f_s/2$ . La Amplitud tiene unidades de voltio

Este fenómeno ocurre porque, al aplicar la exponencial de propagación a nuestra señal en el dominio espectral, el proceso de atenuación no se detiene en  $f_s/2$ . Cuando la señal alcanza esta frecuencia, en lugar de desaparecer por completo, sigue atenuándose. Aunque las muestras que obtenemos a partir de  $f_s/2$  tienen valores relativamente pequeños, no son ceros, lo que implica que aún existe información en esa región del espectro.

Por lo tanto, no es que hayamos eliminado por completo las frecuencias espejo, más bien, lo que está sucediendo es que estamos introduciendo nuevas componentes. Esta nueva señal aparece desde  $f_s/2$  en adelante, debido a la continuidad del proceso de atenuación aplicado sobre la señal original.



Como resultado, no se observa una clara separación entre las frecuencias originales y las frecuencias espejo, ya que las componentes espectrales no se extinguen de manera abrupta. Este comportamiento puede ser visualizado de manera clara en la figura 6-8, donde se observa cómo el espectro de la señal continúa extendiéndose más allá de  $f_s/2$ , en lugar de desaparecer completamente como sería de esperar. Este hallazgo subraya la importancia de comprender el impacto de la atenuación en el dominio frecuencial, especialmente cuando se trabaja con señales que atraviesan medios dispersivos.

### 6.1.3 *Análisis en el Dominio Espectral: Eliminación y Replicación de Frecuencias Espejo*

Realizamos una simulación con tres casos distintos para analizar el comportamiento de la señal en el dominio frecuencial. El primer caso se refiere a la señal original tras haber sido sometida a la exponencial de propagación, mientras que los dos siguientes son modificaciones de este escenario inicial, con el objetivo de obtener resultados mejores.

En este primer caso (“Señal atenuada”), aplicamos directamente la exponencial de propagación a la señal en el dominio espectral. Como se ha explicado anteriormente, este proceso tiene el efecto de atenuar las componentes de alta frecuencia de manera gradual. Sin embargo, debido a que el proceso de atenuación no genera ceros absolutos, observamos cómo la señal sigue presentando valores, aunque muy pequeños, más allá de  $f_s/2$ . Esta persistencia en las componentes de alta frecuencia afecta la simetría de la señal y el comportamiento esperado en el dominio frecuencial. El segundo caso (“Señal atenuada sin espejo”) consiste en una modificación del primero, en el cual se eliminan por completo las frecuencias espejo. Esto se hace cortando el espectro de la señal en  $f_s/2$ , es decir, desechando todas las componentes espectrales más allá de este punto. Finalmente, en el tercer caso (“Señal atenuada con réplica”) lo que hacemos es replicar el espectro de la señal original más allá de  $f_s/2$  para forzar una simetría par en la transformada de Fourier. Esta técnica consiste en reflejar el espectro de la señal en  $f_s/2$  hacia las frecuencias espejo, de modo que el espectro resultante conserve la simetría que debería tener esta transformada.

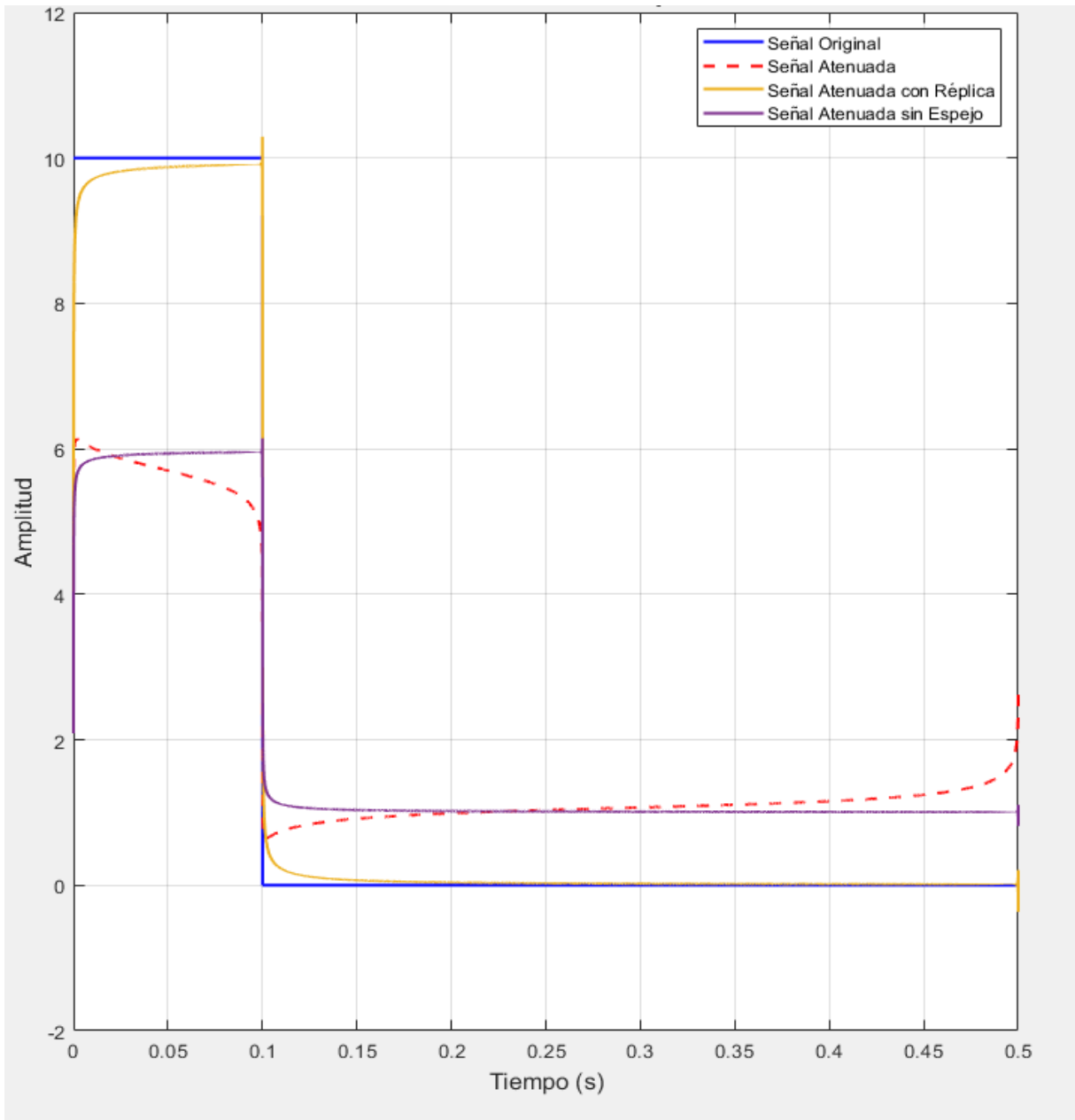


Figura 6-9: Se comparan las diferentes señales estudiadas. En azul es nuestra señal original, en rojo la señal atenuada, pero sin replicar el espectro, en morado la señal con la mitad del espectro (de  $f_s/2$  a  $f_s$ ) anulado y en amarillo la señal con el espectro replicado. La Amplitud tiene unidades de voltio. Señal calculada bajo estas condiciones  $k=500$  km y  $RC=3e-7$

En esta figura lo que podemos ver son los tres casos de estas señales, superpuestos sobre la señal original. Además de cómo cada uno de ellos representa un enfoque distinto para el tratamiento de las señales en el espectro del dominio de las frecuencias y el resultado que lleva consigo. La simulación que más se asemeja a una simulación correcta es, como era de esperar, la que presenta simetría par en su dominio espectral.

#### 6.1.4 Análisis en el tiempo y convolución circular

Otro problema que experimentamos, fue el hecho de no conseguir una atenuación total de las señales usando los métodos anteriores. Con el fin de buscar una solución, decidimos usar la respuesta al impulso del sistema en el dominio del tiempo y procesar las señales a través de convoluciones para luego comparar los resultados.

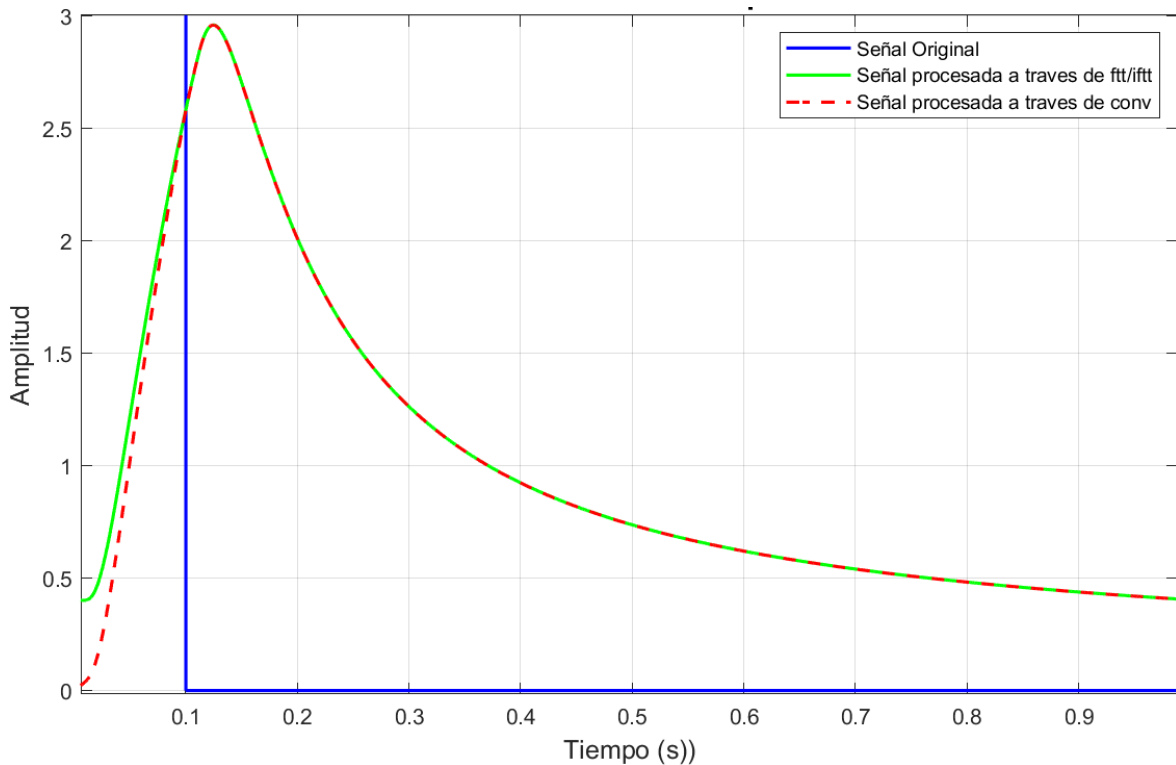


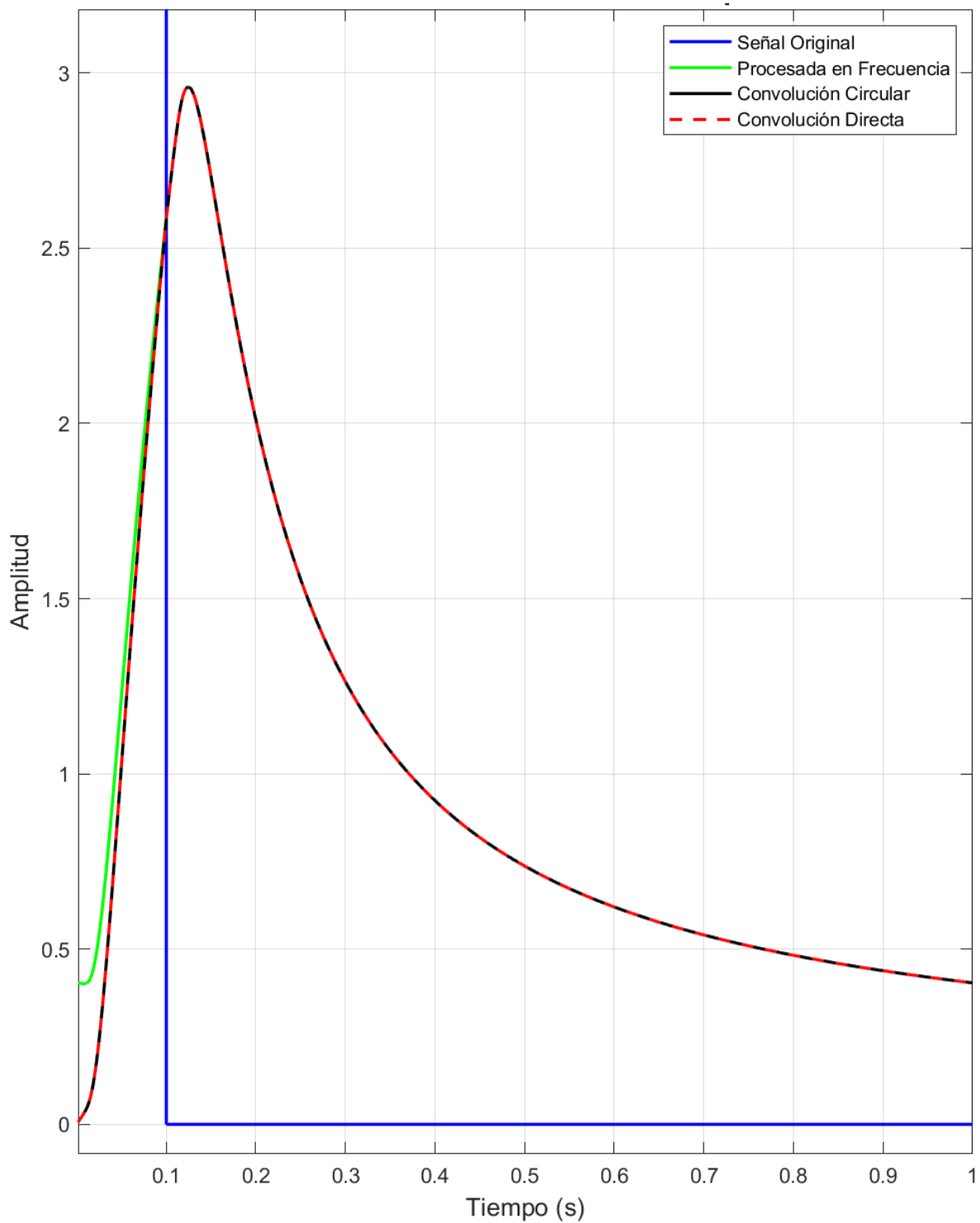
Figura 6-10: Se observa como evidentemente hay un error en la simulación, pues al simular la señales por el dominio de la frecuencia y por el dominio del tiempo obtenemos resultados distintos. La señal esta evaluada para  $k=1000 \text{ km}$  y  $RC=3e-7$

El problema de este fenómeno es para que la convolución circular coincida con la convolución lineal. Las señales se deben de rellenarse con ceros, como se indica en el apartado 4.1.2 de la memoria.

$$N \geq L + P - 1 \quad (157)$$

Así por ejemplo si nuestra señal de entrada tiene una longitud de  $4(L)$  muestras y nuestro filtro (respuesta al impulso) tiene una longitud de  $3(P)$ , necesitaremos que ambas señales tengan una duración de  $6(N)$  muestras. Esto significa que, a la señal de entrada, debemos de añadirle 2 muestras de ceros al final para llegar a las 6 muestras, mientras que a

la repuesta al impulso le corresponden 3 muestras nulas para llegar a las 6. Todo esto se ilustra en el ejemplo mostrado en el punto 4.1.2.1



*Figura 6-11: Tras cumplir la condición anteriormente dicha, vemos como la convolución circular coincide con la convolución lineal(directa). De esa manera evitamos ese error de simulación y vemos como la señal sí que empieza en valor de 0 como se describe en la teoría de Thomson*

## 6.2 ANEXO II: LINEA DE PARES

Las líneas de transmisión junto con la fibra óptica son los principales medios físicos que se usan en la transmisión de señales radioeléctricas. En otras palabras, son elementos fundamentales de la ingeniería de telecomunicación. Como hemos visto anteriormente, desde un modo de vista circuital la solución para una línea de transmisión venia dada por una constante de propagación.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (158)$$

Donde:

- $\alpha$  es la constante de atenuación
- $\beta$  es la constante de fase
- $R, L, G,$  y  $C$  son los parámetros distribuidos de la línea

Sus propiedades eléctricas se describen mediante cuatro parámetros distribuidos: resistencia ( $R$ ), inductancia ( $L$ ), conductancia ( $G$ ) y capacitancia ( $C$ ). Estos parámetros determinan cómo se propaga una señal a lo largo de la línea y afectan tanto a la relación señal ruido de nuestras señales como del retardo que sufren. En este anexo, nos centraremos en una línea de pares, que consiste en dos conductores paralelos, y deduciremos las fórmulas para estos parámetros en función de sus dimensiones y características físicas. Esta línea es de especial interés para nosotros, pues en la práctica ha sido de las líneas como más recorrido histórico a la hora de mandar una señal de voz analógica directamente a la línea.

Para el Cálculo de los parámetros se ha recurrido a las ecuaciones mencionadas en el libro de “Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería”. Evidentemente el libro se encuentra en la bibliografía de este proyecto. Todo ello con él fin de que cualquier persona que quiera profundizar en la obtención de estas ecuaciones, pueda dirigirse directamente a la fuente.

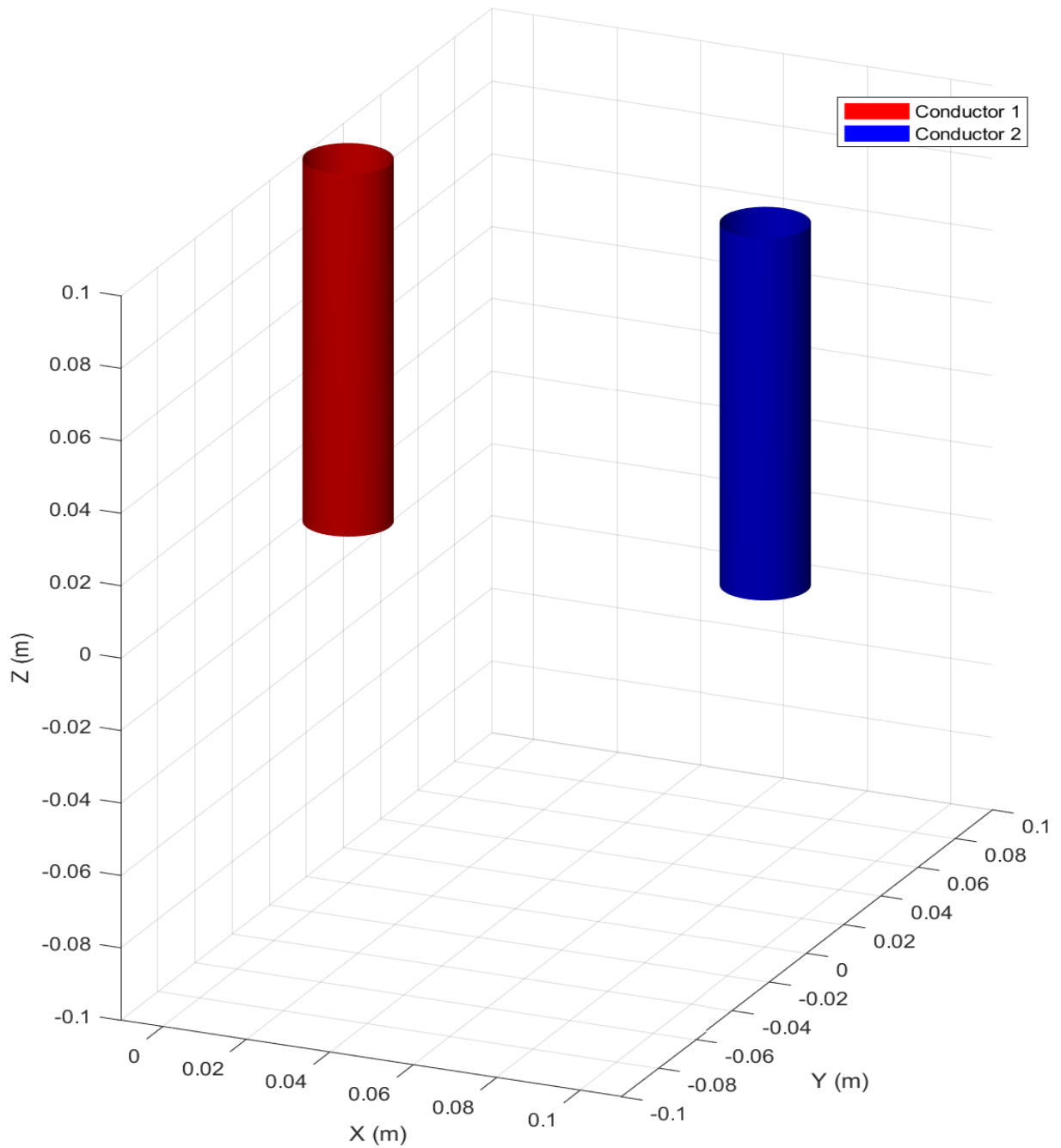


Figura 6-12: Ilustración creada con Matlab, para ilustrar los dos conductores que formaran nuestras líneas de pares. Además del dieléctrico que va a separarlos entre ellos que no se ha dibujado en la imagen

### 6.2.1 Capacitancia (C)

La capacidad de la línea en cuestión viene dada según esta ecuación;

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}^{10} \quad (159)$$

- $\epsilon$  es la permitividad del dieléctrico
- $D$  es la distancia entre los ejes de los conductores
- $a$  es el radio de los conductores

### 6.2.2 Inductancia (L)

La inductancia por unidad de longitud refleja la capacidad del sistema para almacenar energía magnética, se calcula como:

$$L = \left(\frac{\mu}{\pi}\right) \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)^{11} \quad (160)$$

- $\mu$  es la permeabilidad del dieléctrico

### 6.2.3 Conductancia (G)

La inductancia por unidad de longitud está relacionada con las pérdidas en el dieléctrico

$$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}^{12} \quad (161)$$

- $\sigma$  es la conductividad del dieléctrico

---

<sup>10</sup> «Cheng, D.K., “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”, Addison-Wesley Longman, 1998.»

<sup>11</sup> «Cheng, D.K., “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”, Addison-Wesley Longman, 1998.»

<sup>12</sup> «Cheng, D.K., “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”, Addison-Wesley Longman, 1998.»

#### 6.2.4 Resistencia ( $R$ )

La resistencia por unidad de longitud se debe principalmente al efecto pelicular en los conductores. Se calcula como:

$$R = \frac{1}{\sigma_c \pi a \delta} \quad (162)$$

Donde  $\sigma$  es la conductividad del conductor y  $\delta$  es la profundidad de penetración. Esta última se puede expresar en:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_c}} \quad (163)$$

Si sustituimos las expresiones anteriores la expresión de la resistencia por unidad de longitud nos queda como:

$$R = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (164)$$

- $\sigma_c$  es la conductividad del conductor
- $f$  es la frecuencia de operación de la línea
- $a$  es el radio de los conductores
- $\mu_0$  es la permeabilidad del dieléctrico

---

<sup>13</sup> «Cheng, D.K., “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”, Addison-Wesley Longman, 1998.»

<sup>14</sup> «Cheng, D.K., “Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería”, Addison-Wesley Longman, 1998.»



### 6.2.5 Aplicación práctica

Consideremos una línea de transmisión de dos alambres con los siguientes parámetros:

- Radio de los conductores ( $a$ ) = 1 mm
- Separación entre conductores ( $D$ ) = 10 mm
- Medio dieléctrico: plástico ( $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m,  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m)<sup>15</sup>
- Conductividad del plástico ( $\sigma$ ) =  $10 \times 10^{-14}$  S/m<sup>16</sup>
- Conductividad del cobre ( $\sigma$ ) =  $5.96 \times 10^7$  S/m<sup>17</sup>
- Frecuencia de operación ( $f$ ) = 4kHz

## Cálculo de parámetros de la línea

```
% Parámetros dados
a = 1e-3; % Radio de los conductores en metros
D = 10e-3; % Separación entre conductores en metros
epsilon_0 = 8.854e-12; % Permitividad del aire en F/m
mu_0 = 4*pi*1e-7; % Permeabilidad del aire en H/m
sigma = 10e-14; % Conductividad del plástico en S/m
f = 4e3; % Frecuencia de operación en Hz

% Cálculos
omega = 2*pi*f;

% Capacitancia
C = (pi*epsilon_0) / acosh(D/(2*a));

% Inductancia
L = (mu_0/pi) * acosh(D/(2*a));

% Conductancia (despreciable en aire)
G = (pi*sigma) / acosh(D/(2*a));

% Resistencia
delta = sqrt(2 / (omega*mu_0*sigma));
R = 1 / (sigma*pi*a*delta);
```

<sup>15</sup> Mexpolimeros, «Constante dieléctrica».

<sup>16</sup> Mexpolimeros, «Propiedades eléctricas Conductividad».

<sup>17</sup> «Conductividad eléctrica».

```
% Mostrar resultados
fprintf('Resultados de los cálculos:\n\n');
```

Resultados de los cálculos:

```
fprintf('Capacitancia (C): %.4e F/m\n', C);
```

Capacitancia (C): 1.2133692674e-11 F/mm

```
fprintf('Inductancia (L): %.4e H/m\n', L);
```

Inductancia (L): 9.1697266782e-07 H/m

```
fprintf('Conductancia (G): %.4e S/m\n', G);
```

Conductancia (G): 1.3704193216-13 S/m

```
fprintf('Resistencia (R): %.4e Ω/m\n', R);
```

Resistencia (R): 1.1585688927e-02 Ω/m

### 6.2.6 Conclusiones

Los parámetros distribuidos  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  son fundamentales para caracterizar completamente una línea de transmisión. Las relaciones entre los parámetros distribuidos y las propiedades del medio permiten un diseño más preciso de las líneas de transmisión. El efecto pelicular y las pérdidas dieléctricas se vuelven más significativos a altas frecuencias, afectando el rendimiento de la línea.

## 6.4 ANEXO IV: Índice de figuras

FIGURA 2-1: .....	22
FIGURA 2-2: .....	26
FIGURA 2-3:.....	35
FIGURA 2-4.....	35
FIGURA 2-5:.....	36
FIGURA 4-1:.....	44
FIGURA 4-2:.....	46
FIGURA 4-3: .....	46
FIGURA 4-4:.....	47
FIGURA 4-5:.....	48
FIGURA 4-6: .....	49
FIGURA 4-7: .....	50
FIGURA 4-8: .....	51
FIGURA 4-9:.....	52
FIGURA 4-10:.....	54
FIGURA 4-11:.....	55
FIGURA 4-12:.....	56
FIGURA 4-13.....	59
FIGURA 4-14:.....	59
FIGURA 4-15:.....	60
FIGURA 4-16:.....	61
FIGURA 4-17:.....	62
FIGURA 4-18:.....	63
FIGURA 4-19: .....	64
FIGURA 4-20: .....	65
FIGURA 4-21:.....	66
FIGURA 4-22:.....	67
FIGURA 4-23.....	68
FIGURA 4-24:.....	70
FIGURA 4-25:.....	70
FIGURA 4-26:.....	71
FIGURA 4-27:.....	72
FIGURA 4-28:.....	73
FIGURA 4-29:.....	74
FIGURA 4-30:.....	74
FIGURA 4-31.....	75
FIGURA 5-1:.....	77

FIGURA 6-1:.....	80
FIGURA 6-2:.....	81
FIGURA 6-3: .....	81
FIGURA 6-4: .....	82
FIGURA 6-5:.....	83
FIGURA 6-6:.....	86
FIGURA 6-7:.....	87
FIGURA 6-8:.....	88
FIGURA 6-9: .....	90
FIGURA 6-10:.....	91
FIGURA 6-11:.....	92
FIGURA 6-12:.....	94

## 6.5 ANEXO IV: Índice de tablas

TABLA 2-1 .....	9
TABLA 2-2 .....	10
TABLA 2-3 .....	12

## 7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bobina de Pupin. *Wikipedia, la enciclopedia libre*, 1 de febrero de 2024. Disponible en:  
[https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Bobina\\_de\\_Pupin&oldid=157918162](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Bobina_de_Pupin&oldid=157918162).
2. CHENG, D.K. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Addison-Wesley Longman, 1998.
3. CircuitBread. Telegrapher's Equations - Electrical Engineering Textbooks». *CircuitBread*. [En línea]. Disponible en:  
<https://www.circuitbread.com/textbooks/electromagnetics-i/transmission-lines/telegraphers-equations> [Accedido: 25 de abril de 2024].
4. Conductividad eléctrica. *Wikipedia, la enciclopedia libre*, 8 de diciembre de 2024. Disponible en:  
[https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conductividad\\_el%C3%A9ctrica&oldid=163999041](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Conductividad_el%C3%A9ctrica&oldid=163999041).
5. Creación propia- ProfiCAD-dibujar esquemas eléctricos. *ProfiCAD*. [En línea]. Disponible en: <https://es.proficad.com/video-tutoriales/como-dibujar-esquemas-conductores.aspx> [Accedido: 21 de mayo de 2025].
6. Mexpolimeros. Constante dieléctrica. *Polímeros termoplásticos, elastómeros y aditivos*. [En línea]. Disponible en: [<https://www.mexpolimeros.com/lab/constante-dieléctrica.html>](<https://www.mexpolimeros.com/lab/constante-dieléctrica.html>) [Accedido: 28 de julio de 2025].
7. Mexpolimeros. Propiedades eléctricas Conductividad. *Polímeros termoplásticos, elastómeros y aditivos*. [En línea]. Disponible en:  
<https://www.mexpolimeros.com/lab/propiedades-electricas.html> [Accedido: 15 de agosto de 2025].
8. RAO, K. R.; KIM, D. N.; HWANG, J. J. Discrete Fourier Transform. En: *Fast Fourier Transform - Algorithms and Applications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010, pp. 5-40. Disponible en: [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6629-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6629-0_2).
9. REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
10. TFG\_Ela Messe\_Juan Demostenes Asumu. [S. f.].
11. Transmission Line». *Wikipedia*, 4 de diciembre de 2025. Disponible en:  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transmission\\_line&oldid=1267330293](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transmission_line&oldid=1267330293).