Centro de Estudios de Postgrado

Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

UNIVERSIDAD DE JAÉN

Centro de estudios de postgrado

Semejanza en el plano y Geometría.

Alumno/a: Noelia Hervás Valenzuela

Tutor/a: Manuel García Armenteros

Dpto.: Didáctica de las ciencias

Junio, 2020

INDICE

Índice de Tablas

Índice de ilustraciones

Resumen y palabras clave

En el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) titulado “Semejanza en el plano y Geometría”, se describirá una unidad didáctica realizada para el tercer curso de Educación Secundaria de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Además, se compararán libros de texto de distintas editoriales de dicha asignatura, que se encuentran actualmente en uso en los centros. También se verá una fundamentación epistemológica y curricular relacionados con las Matemáticas donde se profundizará en métodos de enseñanza-aprendizaje para mejorar en esta asignatura. Finalmente, se verá la Unidad Didáctica anteriormente mencionada, que se realizará en el centro I.E.S. Fuente de la Peña, de la provincia de Jaén con una duración de tres semanas, y con la cual adquirirán los objetivos y las competencias clave.

Palabras clave: Matemáticas, Educación Secundaria, Geometría, Teorema de Thales, Semejanza.

Abstract and key words

In this Final Master's Project (TFM) entitled "Similarity in the plane and Geometry", a didactic unit will be described for the third year of Secondary Education in the subject of Mathematics oriented to academic teaching. In addition, textbooks from different publishers of this subject, which are currently in use in the centers, will be compared. An epistemological and curricular foundation related to Mathematics will also be seen, where teaching-learning methods will be studied in depth to improve in this subject. Finally, the aforementioned Didactic Unit will be seen, which will be held at the I.E.S. Fuente de la Peña, from the province of Jaén with a duration of three weeks, and with which they will acquire the key objectives and skills.

Key words: Mathematics, Secondary Education, Geometry, Thales' theorem, similarity.

1. Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster, es realizado para la finalización de los estudios del Máster en Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación profesional y Enseñanza oficial de idiomas, en la especialidad de Matemáticas, realizado en la Universidad de Jaén durante el curso 2019/2020.

La finalidad de este trabajo es la elaboración de una unidad didáctica de acuerdo con el currículo para su correcto desarrollo. La unidad didáctica elegida es “Problemas métricos en el plano” que pertenece al bloque de contenidos 3, Geometría.

La normativa que se ha tenido de referencia para este trabajo es del Real Decreto (RD) 1105/2014.

Este documento se desarrolla con los siguientes apartados (Ilustración 1):

- Fundamentación didáctica: En esta primera parte, se comparan libros de texto de diferentes editoriales de Matemáticas orientadas a las enseñazas académicas de 3º de E.S.O. con la normativa vigente.

- Fundamentación epistemológica: En esta parte, se verá el desarrollo de un tema de oposiciones “tema 37, La semejanza en el plano”. Se presentará un análisis profundo sobre estos temas, con sus investigaciones y demostraciones pertinentes que servirá para elaborar una unidad didáctica más adelante.

- Fundamentación curricular: Esta parte tratará de una serie de investigaciones relacionadas con la enseñanza de la Geometría en Educación Secundaria.

- Proyección didáctica: En esta parte, se verá el desarrollo de una programación de aula sobre “problemas métricos en el plano”.

Finalmente, se terminará con unas conclusiones y la bibliografía que se ha consultado para realizar este trabajo.

Ilustración 1: Esquema. FUENTE: Propia

2. Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo Final de Máster es utilizar los conocimientos aprendidos durante el master para profundizar en la enseñanza de la Geometría con una correcta elaboración de una Unidad Didáctica.

Además de ese objetivo específico, hay que tener en cuenta otros objetivos generales que también hay que conseguir:

- Conocer las características de los alumnos y sus motivaciones e implicarse en su desarrollo.
- Analizar y corregir las dificultades de los alumnos correctamente según sus necesidades.
- Conocer y aplicar los diversos recursos TIC en la enseñanza.
- Analizar los diversos contextos que influyen en la práctica educativa y en la profesión docente.
- Adquirir habilidades sociales para mejorar el trato y la orientación del alumnado y su familia.
- Establecer un buen clima de aula para conseguir un correcto aprendizaje.
- Analizar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Fomentar el aprendizaje individual y en grupo para desarrollar habilidades y facilitar la autonomía e iniciativa personal.
- Conocer y aplicar la normativa del sistema educativo español.

3. Fundamentación didáctica

A nivel legislativo, podemos encontrar el Real Decreto **R.D. 1105/2014 del 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato**, el cual ha servido de referencia para crear la unidad didáctica creada en este trabajo.

Los libros de texto de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de ESO que se han consultado son (Hernández, J., Serrano, E., Alcaide, F., Moreno, M. & Pérez, A., 2016) y (Colera, J., Olivieira, M.J., Geztelu, I., & Colera, R., 2016) de los que podemos destacar:

Editorial	Anaya	SM
Tema	10: Problemas métricos en el plano	7: Figuras planas
Contenidos	- Relaciones angulares. - Semejanza de triángulos. - Teorema de Pitágoras. Aplicaciones. - Aplicación algebraica del Teorema de Pitágoras. - Lugares geométricos. - Las cónicas como lugares geométricos. - Áreas de los polígonos. - Áreas de figuras curvas.	- Polígonos. - Triángulos. - Pitágoras. Aplicaciones. - Circunferencia y círculo. - Longitudes y áreas de polígonos. - Longitud y áreas de figuras circulares. - Lugares geométricos.

Tabla 1 Comparación de editoriales. FUENTE: Propia

En las dos editoriales se ve claramente como tienen la información parecida y completa. Comenzamos con el primer apartado, en Anaya se explican las relaciones angulares, lo que conlleva los ángulos de los polígonos, de las circunferencias y algunos otros casos particulares; en SM explica los polígonos, la suma de polígonos y los polígonos regulares.

En el segundo apartado, Anaya trata la semejanza de triángulos, en lo que explica el teorema de Thales y los criterios de semejanza; en SM, explican los triángulos con medianas, alturas, mediatrices y bisectrices.

El tercer apartado lo tienen en común, ambas editoriales tratan el teorema de Pitágoras, con su fórmula para calcular cuando falta el dato de un lado del triángulo rectángulo. A continuación, vamos a ver como lo explica cada editorial.

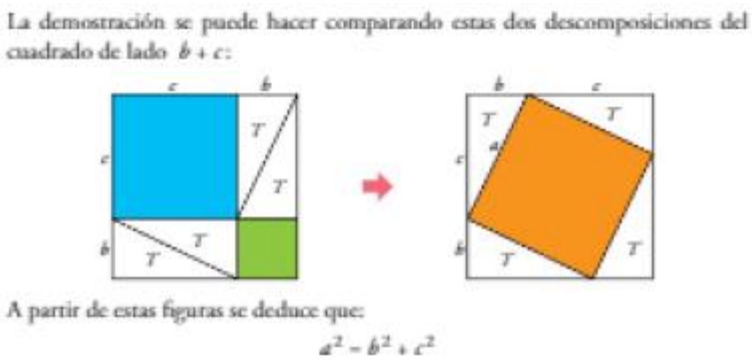
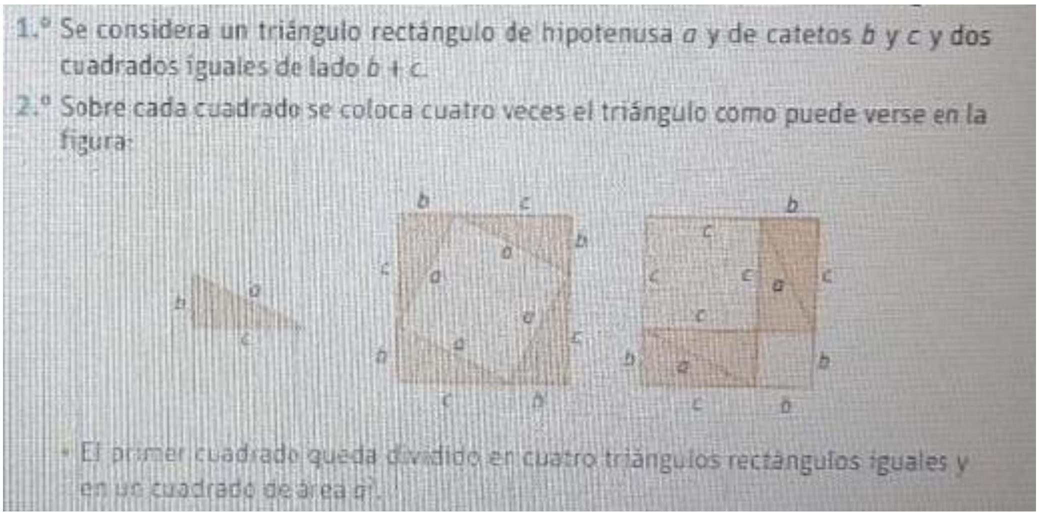


Ilustración 2 Teorema de Pitágoras. FUENTE: Anaya



1.º Se considera un triángulo rectángulo de hipotenusa a y de catetos b y c y dos cuadrados iguales de lado $b + c$.

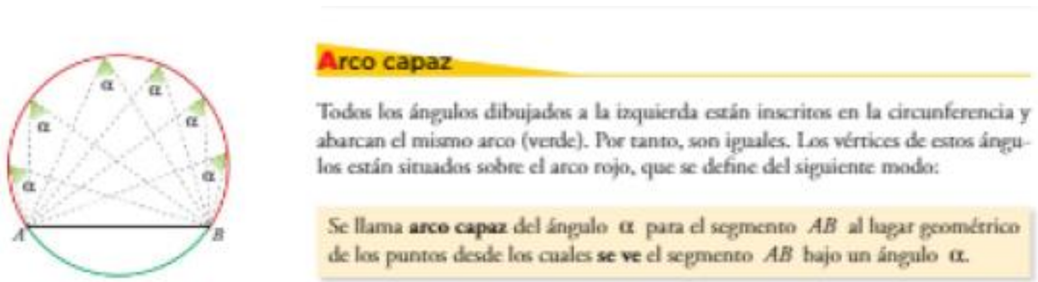
2.º Sobre cada cuadrado se coloca cuatro veces el triángulo como puede verse en la figura:

• El primer cuadrado queda dividido en cuatro triángulos rectángulos iguales y en un cuadrado de área a^2.

Ilustración 3 Teorema de Pitágoras. FUENTE: SM

En la siguiente parte, Anaya sigue con las aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras, queriendo conseguir que se logre ver el teorema en otras figuras, quiere lograr ver el triángulo rectángulo en un cuadrado o un trapezoide; por el contrario, SM pone en conocimiento la circunferencia y el círculo, trata los elementos de la circunferencia (arco, cuerda, radio y diámetro) y los elementos del circulo (sector circular, corona circular, segmento circular y trapecio circular) además de ver los ángulos en la circunferencia como el ángulo central y el ángulo inscrito.

Los puntos cinco y seis de Anaya tratan de lugares geométricos y las cónicas como lugares geométricos que coinciden con el punto siete, lugares geométricos de SM. En las dos editoriales se puede observar que explican la mediatriz, bisectriz, elipse, parábola e hipérbola, la diferencia se encuentra en que Anaya estudia el arco capaz y SM estudia la circunferencia que veremos a continuación.

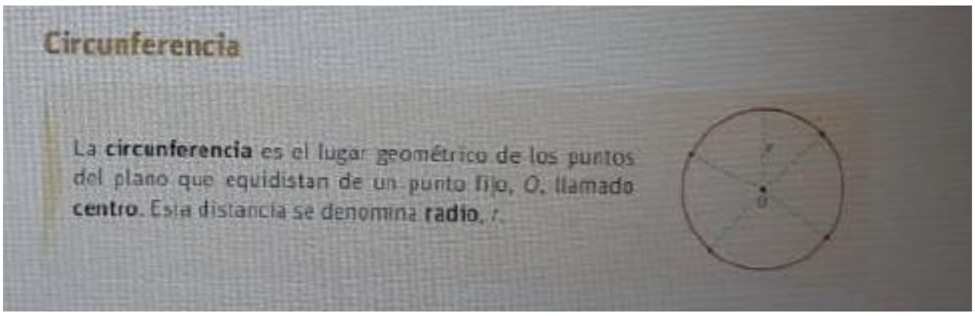


Arco capaz

Todos los ángulos dibujados a la izquierda están inscritos en la circunferencia y abarcan el mismo arco (verde). Por tanto, son iguales. Los vértices de estos ángulos están situados sobre el arco rojo, que se define del siguiente modo:

Se llama **arco capaz** del ángulo α para el segmento AB al lugar geométrico de los puntos desde los cuales **se ve** el segmento AB bajo un ángulo α.

Ilustración 4 Arco Capaz. FUENTE: Anaya



Circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, O, llamado **centro**. Esta distancia se denomina **radio**, r.

Ilustración 5 Circunferencia. FUENTE: SM

El punto siete de Anaya coincide con el punto cinco de SM y tratan de Áreas de los polígonos. Como cada editorial ha escogido diferentes polígonos, se pondrá la tabla con los que ha elegido cada uno.

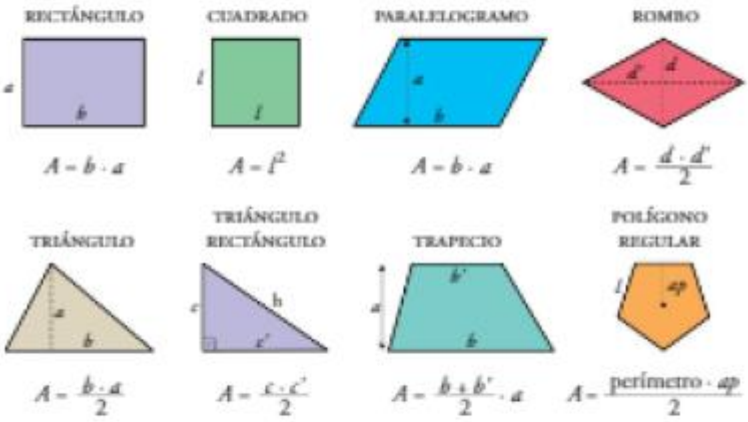


Ilustración 6 Polígonos. FUENTE: Anaya

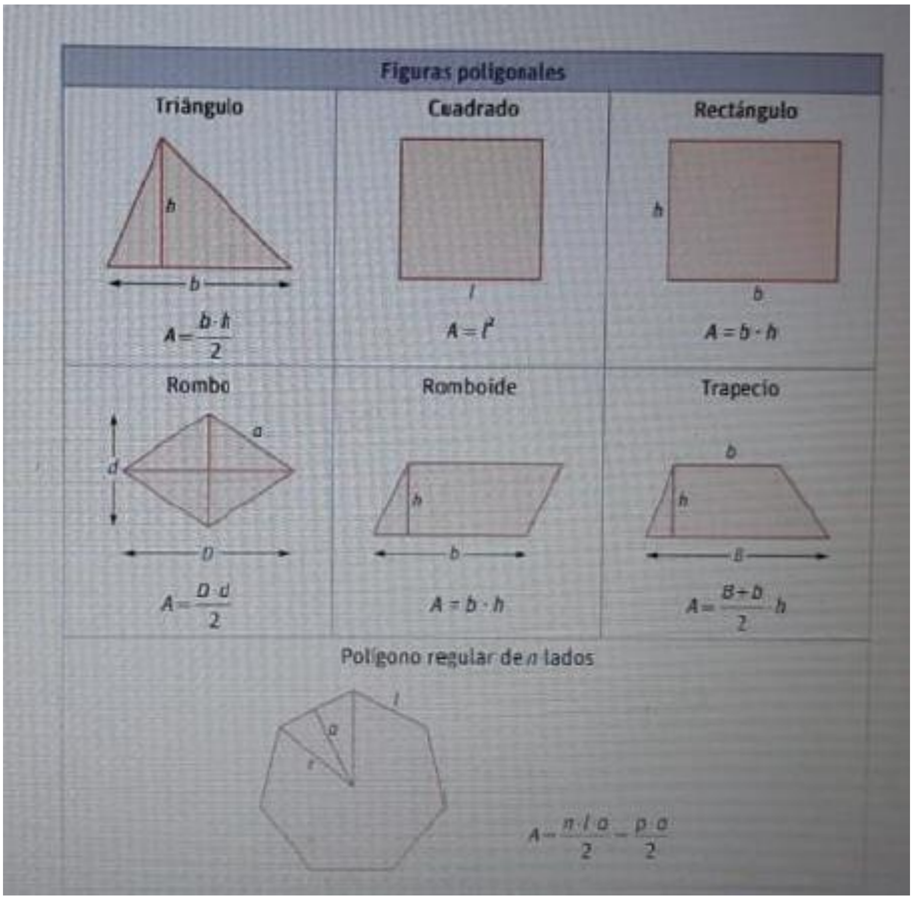


Ilustración 7 Polígonos. FUENTE: SM

El último punto corresponde al área de figuras circulares, que sería el punto 8 de Anaya y el punto 6 de SM. A continuación, un esquema de lo que explica cada libro.

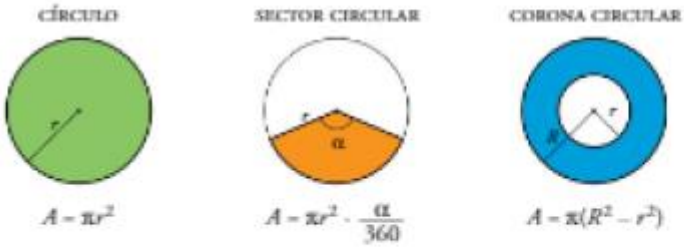


Ilustración 8 Figuras circulares. FUENTE: Anaya

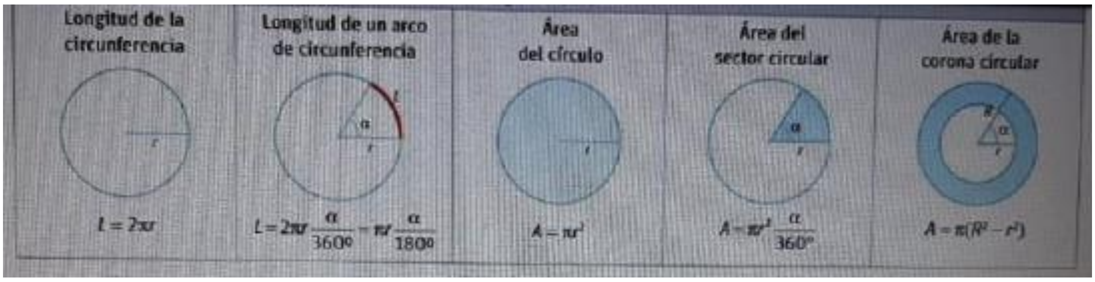


Ilustración 9 Figuras circulares. FUENTE: SM

Se puede observar en general, que en esta unidad didáctica, la editorial SM proporciona más información a la hora de afrontar un punto de la unidad por lo que a los alumnos les parece más comprensible. Por otro lado, la estructura de la editorial Anaya, me parece más correcta debido a que la organización entre sus puntos tiene más coherencia.

Por último, las actividades de realización del tema, como las resueltas, en ambas editoriales tienen más o menos el mismo nivel, por lo que en lo que respecta, el nivel de conocimiento alcanzado por los alumnos al acabar la unidad didáctica debería ser el mismo en cualquiera de las dos editoriales.

4. Fundamentación epistemológica

En este apartado, se va a desarrollar el tema 37 “La semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas” que forma parte del temario de las oposiciones de profesorado de secundaria en la especialidad de Matemáticas.

El temario estará dividido en cuatro partes en las que se verá una introducción al tema, la semejanza en el plano, el teorema de Thales y las razones trigonométricas.

4.1. Introducción

Mirando hacia la historia, se considera que la Grecia clásica es la más destacó por sus estudios en semejanza y proporcionalidad. Aquí se encuentran pensadores tan importantes como Thales de Mileto y Pitágoras, por ejemplo.

En Geometría, se pueden encontrar conceptos que son muy intuitivos, por ejemplo, el concepto de semejanza, el cual dice que dos figuras son semejantes cuando son de igual forma, pero de distinto tamaño. De esta manera, se puede relacionar la semejanza con la proporcionalidad.

El teorema de Thales, es un pilar fundamental básico de la Geometría ya que trabaja desde el campo de los triángulos semejantes.

Finalmente, se verán las razones trigonométricas, que son las razones que establecen la relación entre los lados y ángulos de un triángulo.

4.2. Relación de semejanza en el plano. Consecuencias

Se entiende como semejanza en el plano a toda correspondencia matemática que asocia cada elemento de un conjunto con un solo elemento de otro conjunto tal que si A’, B’ y C’ son las imágenes de dos puntos cualquiera A, B y C se verifica que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

Siendo k una constante real llamada razón de semejanza. La razón de semejanza es la relación constante entre dos lados homólogos.

4.2.1 Semejanza de triángulos

El estudio de la semejanza de triángulos es muy importante, debido a que todo polígono se puede dividir en triángulos, y estos triángulos serán semejantes entre sí con la misma razón de semejanza (k).

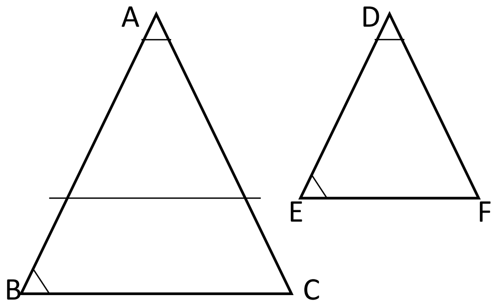
Se dice que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales.

Podemos encontrar tres criterios que demuestran que dos triángulos son semejantes:

1º criterio de semejanza: dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Demostración:

Sean los triángulos ABC y DEF en los que se verifica que: A=D y B=E



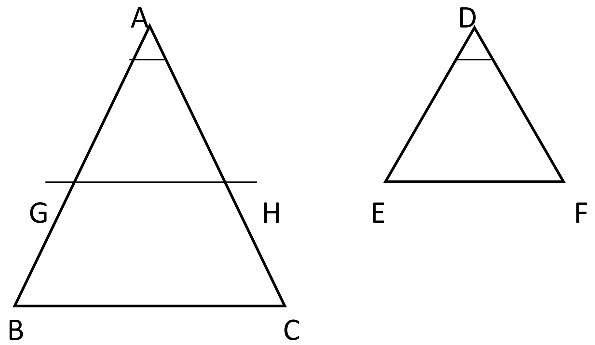
Si superponemos el triángulo DEF sobre el triángulo ABC, podemos comprobar como los vértices A y C coinciden, y los vértices B y E coinciden por lo que son semejantes.

2º criterio de semejanza: Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos son iguales.

Demostración:

Sean los triángulos ABC y DEF en los que se verifica que:

$$\hat{A} = \hat{D} \; y \; \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$



Tomando en AB un segmento AG=DE, y trazando por G una paralela a BC, los triángulos resultantes, AGH y ABC serán semejantes por lo que tendremos que:

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

Como AG=DE, si se tiene en cuenta la proporción, se tendrá que:

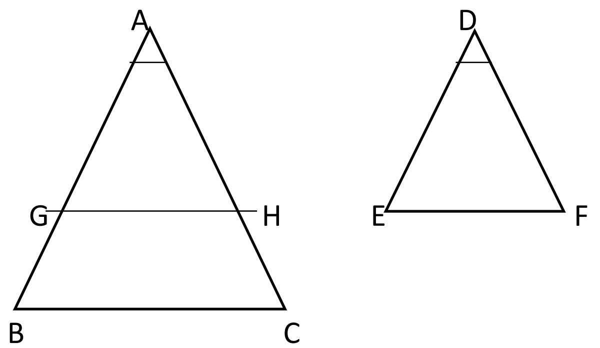
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$$

De donde tenemos que AH=DF, y los triángulos AGH y DEF serán iguales por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido también igual, por lo que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

3º criterio de semejanza: dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.

Demostración:
Sean los dos triángulos ABC y DEF en los que se verifica por hipótesis que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$



Tomamos el segmento AG=DE y trazamos una paralela a BC que sería GH. Los triángulos resultantes AGH y ABC son semejantes. Como consecuencia tenemos que:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}$$

Comparando estas razones con las que sirven de hipótesis, se ve AG=DE, por construcción también se obtiene como resultado que AH=DF y GH=EF por lo que se verifica la semejanza de los triángulos.

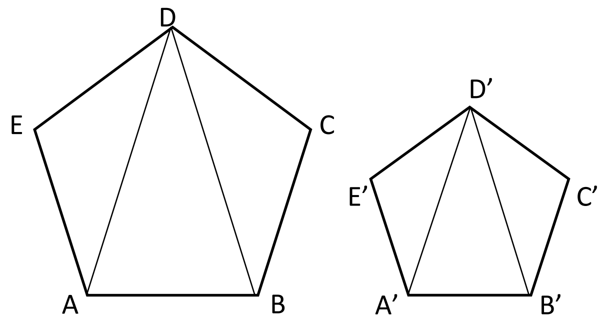
4.2.2 Polígonos semejantes

Se conoce como polígonos semejantes a los polígonos que presentan igual número de lados, que tienen ángulos respectivamente iguales y lados homólogos proporcionales.

Dos polígonos son semejantes si al descomponerlos en triángulos, los triángulos dados son semejantes y de la misma proporción.

Demostración:
Los polígonos ABCDE y A’B’C’D’E’ son semejantes si se verifica que:

$$\hat{A} = \widehat{A'} \quad \hat{B} = \widehat{B'} \quad \hat{C} = \widehat{C'} \quad \hat{D} = \widehat{D'} \quad \hat{E} = \widehat{E'}$$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$$

$\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son los lados homólogos. Suponiendo que $\overline{AB}$ sea k veces $\overline{A'B'}$, tendremos que la razón de semejanza de estos polígonos será:

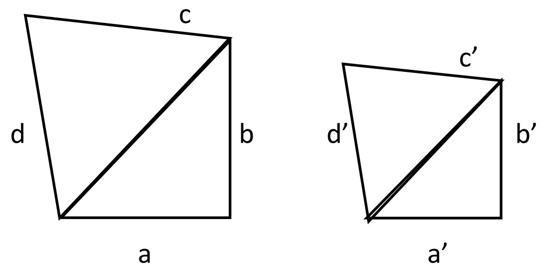
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$$

Las diagonales de los polígonos también serán líneas homólogas por lo que $\overline{AD}$ será k veces $\overline{A'D'}$.

1º Teorema: si dos polígonos son semejantes, entonces la razón de los perímetros es igual a la razón de semejanza.

Demostración:

Sean P y P' polígonos semejantes cuyos perímetros son p y p' y sea k la razón de semejanza.



Polígono P Polígono P'

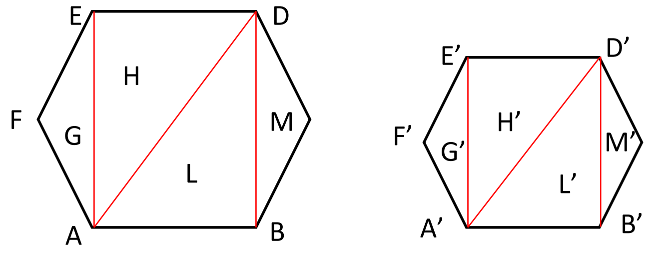
La semejanza de los polígonos resulta: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

En las series de proposiciones de razones iguales se verifica que la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como un antecedente es a su consecuente, por lo que:

$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \frac{a}{a'} = k \Rightarrow \frac{P}{P'} = k \Rightarrow \frac{p}{p'} = k$$

2º teorema: Dos polígonos convexos son semejantes si se pueden descomponer en el mismo número de triángulos semejantes uniendo los vértices homólogos.

Demostración:



Polígono P Polígono P'

- De la semejanza del triángulo G y G' se obtiene:

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$$

Y

$$\begin{cases} \hat{F} = \widehat{F'} \\ \widehat{FEA} = \widehat{F'E'A'} \end{cases}$$

- De la semejanza del triángulo H y H' se obtiene:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$$

Y

$$\begin{cases} \widehat{AED} = \widehat{A'E'D'} \\ \widehat{EDA} = \widehat{E'D'A'} \end{cases}$$

- Si relacionamos los resultados de las dos semejanzas anteriores, se obtiene:

$$\hat{F} = \widehat{F'}$$

$$\widehat{FEA} + \widehat{AED} = \widehat{F'E'A'} + \widehat{A'E'D'} \Rightarrow \hat{E} = \widehat{E'}$$

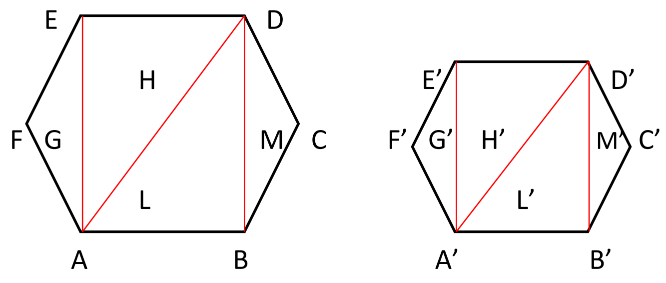
$$\frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}}$$

De igual manera, se establecerían las igualdades de los demás ángulos de los polígonos P y P', así como la proporcionalidad de sus lados homólogos y, por consiguiente, los polígonos son semejantes.

3º Teorema: dos polígonos son semejantes si pueden descomponerse en un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.

Demostración:

Sean los polígonos P y P', trazando en el polígono P las diagonales EA, AD y DB, y las diagonales homologas en el polígono P', obtendremos:



Polígono P Polígono P'

- Los triángulos G y G' son semejantes ya que tienen un ángulo igual que está comprendido entre dos lados proporcionales, $\widehat{F} = \widehat{F'}$, se verifica que:

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

Por lo que:

$$\widehat{FEA} = \widehat{F'E'A'}$$

$$\widehat{FAE} = \widehat{F'A'E'}$$

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

- Los triángulos H y H' son semejantes porque se tiene que $\widehat{AED} = \widehat{A'E'D'}$, como diferencia de ángulos iguales, $\widehat{E} - \widehat{FEA} = \widehat{E'} - \widehat{F'E'A'}$, y además:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{E'D'}}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, podemos demostrar la semejanza del triángulo L y L', y del triángulo M y M'.

4.2.3 Homotecias

Sea O un punto fijo en el plano y k un número real distinto de cero, llamaremos homotecia de centro O y razón k, que se designará como $\boldsymbol{H_{O,k}}$, a la aplicación del plano en sí mismo que hace corresponder a cada punto A en otro A'. A, A' y O están alineados tal que:

$$\overline{OA'} = |k| * \overline{OA}$$

Al punto A' se le denomina homotético de A y se escribe:

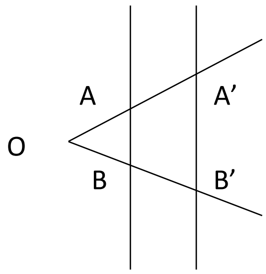
$$H_{O,k}\ (A) = A'$$

- Si k>0, entonces A y A' están en la misma semirrecta de centro O. En este caso, la homotecia se llama directa.
- Si k<0, entonces A y A' están en distinto lado de la semirrecta de centro O. En este caso la homotecia se llama inversa.
- Si k=1, entonces A y A' coinciden. En este caso, la homotecia es la identidad.
- Si k=-1, la homotecia es una simetría central de centro O.

1ª propiedad: La imagen de una recta que no pasa por el centro de homotecia es otra recta paralela a la primera.

Demostración:

Sean A y B dos puntos y A' y B' sus imágenes en una homotecia de centro O y razón k. Se quiere ver que la recta r definida por A y B y la recta r' definida por A' y B' son paralelas.



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k \quad \text{y} \quad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$$

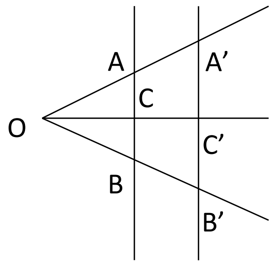
$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \text{ son paralelos}$$

2ª propiedad: La homotecia trasforma puntos alineados en puntos alineados y puntos no alineados en puntos no alineados.

Demostración:

Sean A, B y C puntos alineados y A’, B’ y C’ sus puntos homotéticos de centro O y razón de semejanza k.

- A, B y C están alineados:



Se verifica que:

$$k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{AB} \text{ y } \overline{A'B'} \text{ son paralelos}$$

Por proporcionalidad se obtiene que:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

$$\overline{A'B'} = k * \overline{AB}$$

$$\overline{OB'} = k * \overline{OB}$$

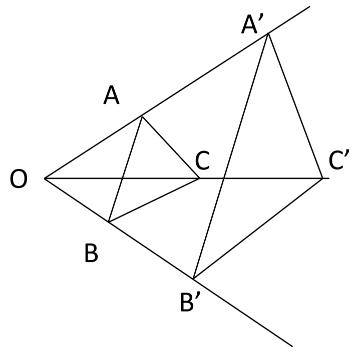
$$\overline{OA'} = k * \overline{OA}$$

Se cumple por ser alineados que la distancia de A hasta C es igual a la distancia de A hasta B más la distancia de B hasta C. Si la ecuación resultante la multiplicamos por k, se cumpliría que A’, B’ y C’ están alineados.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$k * \overline{AC} = k * \overline{AB} + \mathrm{k} * \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

- A, B y C no están alineados:



Se verifica que:

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

Si multiplicamos la ecuación por k, se cumpliría que A', B' y C' no están alineados.

$$k * \overline{AC} < k * \overline{AB} + \mathrm{k} * \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'C'} < \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$$

3ª propiedad: El producto de dos homotecias de centro O es una homotecia del mismo centro.

Demostración:

Sea O el centro de ambas homotecias, siendo A' imagen de A respecto de la primera homotecia y A'' imagen de A' respecto de la segunda homotecia, tenemos:

O, A y A' están alineados y O, A' y A'' están alineados por lo que O, A y A'' están alineados.

- k_1 la razón de la primera homotecia $\Rightarrow \frac{\overline{OA\prime}}{\overline{OA}} = k_1$
- k_2 la razón de la segunda homotecia $\Rightarrow \frac{\overline{OA\prime\prime}}{\overline{OA\prime}} = k_2$

Si multiplicamos ambas expresiones tenemos que k_1k_2 es la razón de la homotecia producto.

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} * \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = k_1k_2 \Rightarrow \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = k_1k_2$$

4ª propiedad: La inversa de una homotecia de centro O y razón de semejanza k es una homotecia del mismo centro y razón de semejanza $\frac{1}{k}$.

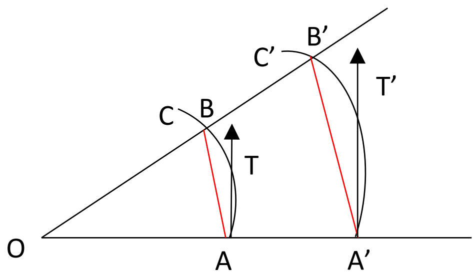
Demostración:

Si A' es la imagen de A por la homotecia de razón k, entonces $\frac{\overline{OA\prime}}{\overline{OA}} = k$ y por tanto $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA\prime}} = \frac{1}{k}$.

5ª propiedad: Las tangentes a dos curvas homotéticas en dos puntos homólogos son paralelas.

Demostración:

Sean A y B dos puntos de la curva C, y A’ y B’ sus correspondientes homólogos de la curva C’, homotética de C.



Al ser C y C’ homotéticas, las cuerdas AB y A’B’ son paralelas. Si el punto B se aproxima al punto A, permaneciendo sobre la curva C, el punto B’ se aproximará al punto A’, permaneciendo las cuerdas AB y A’B’ constantemente paralelas en el desplazamiento, inclusive en la posición limite, cuando sus soportes lleguen a ser las tangentes AT y A’T’.

4.2.4 Semejanza en el plano

Llamamos semejanza en el plano a toda correspondencia matemática que asocia cada elemento de un conjunto con solo un elemento de otro conjunto. Tal que, si A’ y B’ son las imágenes de dos puntos cualquiera A y B, se verifica que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} =$k, siendo k una constante real dada llamada razón de semejanza.

Una semejanza en el plano está formada por la composición de trasformaciones isogonales: giro, traslación, simetrías y homotecias.

La semejanza en el plano puede descomponerse en producto de una homotecia por un movimiento o de un movimiento por una homotecia. Si el movimiento es directo, la semejanza es directa, y si el movimiento es inverso, la semejanza es inversa.

Propiedades de la semejanza:

- Los segmentos homólogos son proporcionales.
- Las semejanzas trasforman puntos alineados en puntos alineados en el mismo orden y, rectas en rectas.
- Las semejanzas trasforman ángulos en ángulos iguales, del mismo sentido si la semejanza es directa y de sentido contrario si la semejanza es inversa.
- La razón de semejanza es igual a la razón de homotecia.

En consecuencia, la figura trasformada de un polígono cualquiera es otro polígono cuyos ángulos son respectivamente iguales a los del polígono dado, y sus lados son, respectivamente, proporcionales a él.

Semejanzas directas e inversas:

Una semejanza es directa cuando al descomponerse en un movimiento por una homotecia, el movimiento es directo.

Demostración:

Sea S una semejanza que trasforma el triángulo ABC en A'B'C'. S es una semejanza directa, si y solo si los triángulos tienen la misma orientación.

Por ser una semejanza directa, se descompone como producto de una homotecia por un movimiento directo.

$$S = H * M_d \Rightarrow S(ABC) = (H * M_d)(ABC) = H\big(M_d(ABC)\big) = H(A_1B_1C_1) = A'B'C'$$

Por ser el movimiento directo, $A_1B_1C_1$ tiene la misma orientación que ABC y como las homotecias tambien la conservan tenemos que, $A_1B_1C_1$ tiene la misma orientación que $A'B'C'$. Por lo que ABC y $A'B'C'$ tienen la misma orientación.

4.3. Teorema de Thales

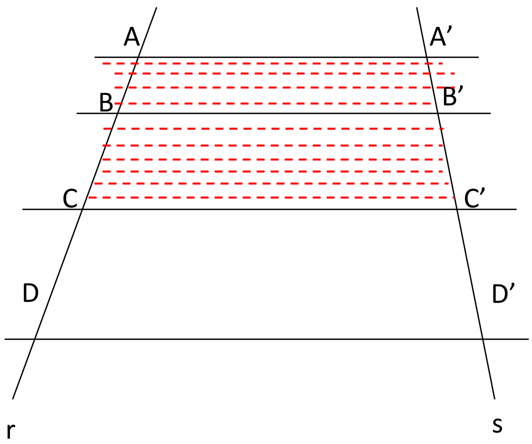
Thales de Mileto fue un matemático griego que estudió las razones de semejanza de las figuras y dedujo lo que hasta hoy se conoce como el teorema de Thales. Podemos encontrar dos teoremas, uno de ellos explica lo que ocurre cuando dos rectas son cortadas por dos trasversales, y otro explica la forma de construir un triángulo semejante a partir de uno ya existente.

1º Teorema: Sean dos rectas r y s de un plano. En r tomamos dos segmentos cualesquiera $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y trazamos por sus extremos rectas paralelas entre sí de manera que corten a la recta s, determinando en s dos segmentos proporcionales a los primeros y por tanto, se verificará que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Demostración:

Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen una medida común l, de manera que $\overline{AB}$ la contiene n veces y $\overline{BC}$, m veces. Con lo que la razón de semejanza de ambos segmentos será:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{nl}{ml} = \frac{n}{m}$$



Si llevamos estas medidas referidas a una zona común, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ obtenemos n divisiones en $\overline{AB}$ y m divisiones en $\overline{BC}$. Por éstas, trazamos paralelas a la recta AA' y dichas paralelas sabemos que cortan o dividen a $\overline{A'B'}$ en n segmentos iguales entre sí y proporcionales a los de $\overline{AB}$. Lo mismo ocurre en B'C' por lo que:

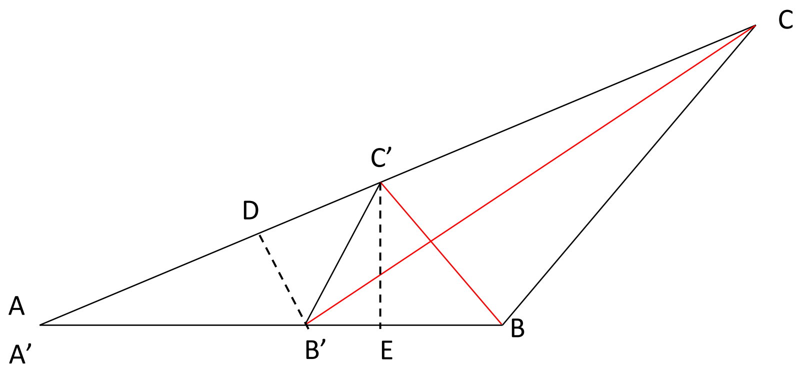
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{nl'}{ml'} = \frac{n}{m}$$

De la ecuación anterior deducimos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

2º Teorema: Si en un triángulo $\overline{ABC}$ se traza un segmento paralelo, $\overline{B'C'}$ a uno de los lados del triángulo, se obtiene un triángulo, $\overline{A'B'C'}$ que es semejante al triángulo $\overline{ABC}$.

Demostración:



Se cumple que los triángulos $\widehat{BB'C'}$ y $\widehat{CC'B'}$ tiene la misma área, porque tienen la misma base $\overline{C'B'}$ y la altura de ambos triángulos es la distancia entre dos rectas paralelas $\overline{B'C'}\ y\ \overline{BC}$, $\overline{B'D}\ y\ \overline{BC'}$. Calculamos las áreas:

- Área $\widehat{BB'C'} = 0{,}5 * |BB'| * |C'E|$
- Área $\widehat{CC'B'} = 0{,}5 * |C'C| * |B'D|$
- Área $\widehat{A'B'C'} = 0{,}5 * |A'B'| * |B'D| = 0{,}5 * |AC'| * |C'E|$

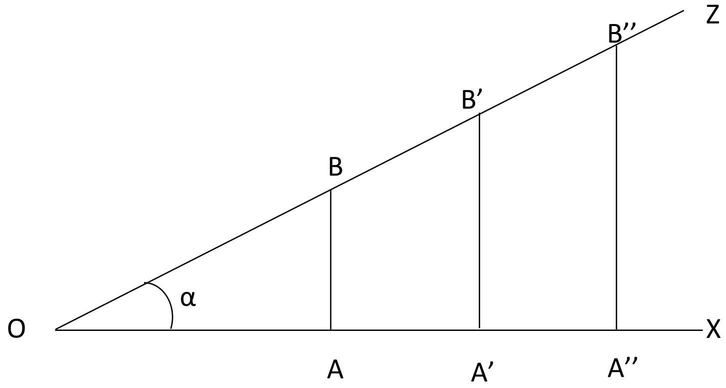
$$\begin{cases} \dfrac{\text{área } \widehat{A'B'C'}}{\text{área } \widehat{BB'C'}} = \dfrac{|A'B'|}{|BB'|} \\ \dfrac{\text{área } \widehat{A'B'C'}}{\text{área } \widehat{CC'B'}} = \dfrac{|A'C'|}{|C'C|} \end{cases} \Rightarrow \frac{|A'B'|}{|BB'|} = \frac{|A'C'|}{|C'C|} \to \frac{|A'B'|}{|BB'| + |A'B'|} = \frac{|A'C'|}{|C'C| + |A'C'|} \to k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Por otro lado $\overline{B'C'} = \overline{AC'} - \overline{AB'} = k(\overline{AC} - \overline{AB}) = k\overline{BC} \to \dfrac{|AB'|}{|AB|} = \dfrac{|AC'|}{|AC|} = \dfrac{|B'C'|}{|BC|}$

Por otro lado, los tres ángulos son iguales, al estar formados por lados paralelos, por lo que se cumple que los ángulos iguales y los lados son proporcionales, por lo tanto, los triángulos son semejantes.

4.4. Razones trigonométricas

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo igual, además del recto. Sea α el ángulo de vértice O y lados OX y OZ. Sobre él construimos el triángulo rectángulo $\widehat{OAB}$.



- Llamamos seno de α a la razón entre el cateto opuesto $\overline{AB}$ y la hipotenusa $\overline{OB}$:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

- Llamamos coseno de α a la razón entre el cateto adyacente $\overline{OA}$ y la hipotenusa $\overline{OB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$$

- Llamamos tangente de α a la razón entre el cateto opuesto $\overline{AB}$ y el cateto adyacente $\overline{OA}$:

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$$

Vamos a ver la relación que existe entre seno, coseno y tangente de un mismo ángulo:

- Si dividimos seno entre coseno:

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}}{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \longrightarrow tg\ \alpha$$

- Si sumanos los cuadrados de seno mas coseno:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2}{\overline{OB}^2} = 1$$

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Fórmula Fundamental de la Trigonometría

Cómo ya sabemos del teorema de Pitágoras, el valor de la hipotenusa de un triángulo es mayor que el de los dos catetos, por tanto, se cumple que:

$$cuando\ \alpha\ \in (0{,}90°) \begin{cases} 0 < sen\ \alpha < 1 \\ 0 < \cos\alpha < 1 \end{cases}$$

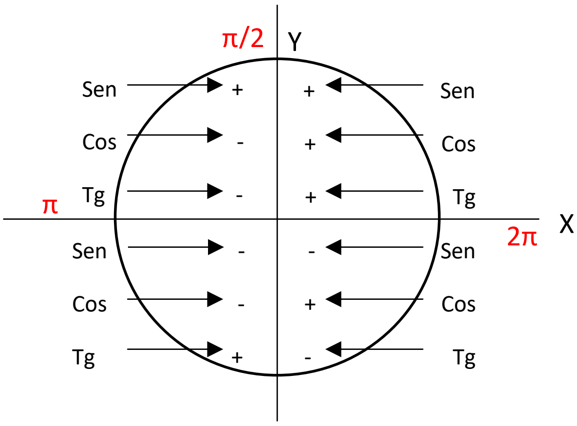
A partir de estas razones trigonométricas fundamentales, podemos definirlas razones inversas de las anteriores:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

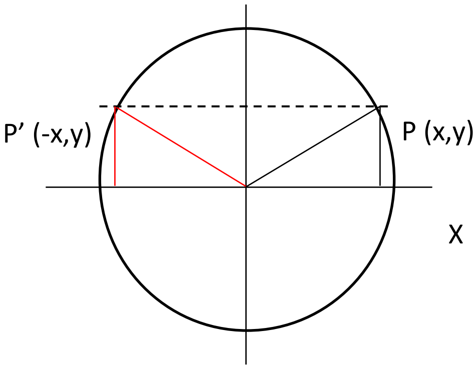
$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$$

Estudiamos lo anterior sobre un sistema de ejes cartesianos (OX, OY). Consideramos la circunferencia de centro O y radio 1. Sea P (x, y), un punto de la circunferencia, obtenemos:



- Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante:
  Dado un ángulo cualquiera comprendido entre π/2 y 2π, siempre existe un ángulo en el primer cuadrante cuyas razones trigonométricas son iguales en valor absoluto a las del ángulo dado.

  - **Ángulos suplementarios**: Dibujamos un punto P simétrico del P' respecto del eje OY. Los triángulos rectángulos son iguales por tanto son suplementarios:

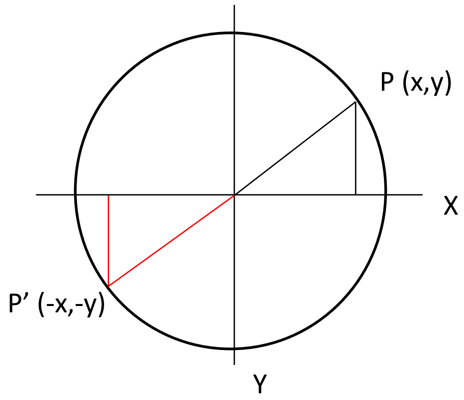


$$sen\ 150° = sen\ (180° - 30°) = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150° = \cos\ (180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 150° = tg\ (180° - 30°) = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Ángulos que difieren en π**: Los triángulos rectángulos son iguales, y de esta igualdad deducimos:

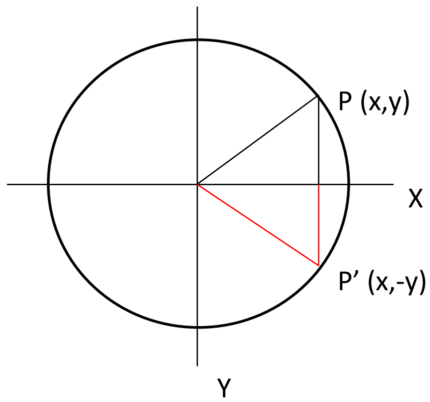


$$sen\ 210° = sen\ (180° + 30°) = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \cos\ (180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 210° = tg\ (180° + 30°) = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Ángulos que suman 2π**: También llamados ángulos opuestos. P’ es el simétrico del punto P respecto del eje OX. Los triángulos rectángulos son iguales y deducimos:

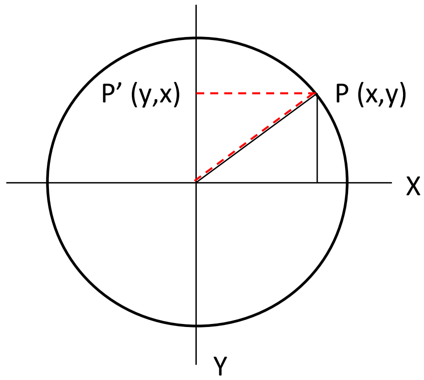


$$sen\ 330° = sen\ (360° - 30°) = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos\ (360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 330° = tg\ (360° - 30°) = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Ángulos complementarios**: Los triángulos rectángulos son iguales y de esta igualdad deducimos:



$$sen\ 60° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60\ ° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = ctg\ = \frac{\cos 30°}{sen\ 30°} = \sqrt{3}$$

Bibliografía

- Báez, O., González, A., Gudiño, G., Noguera, L., & Iglesias, M. (2013). Teorema de Thales: Una Propuesta Didáctica. *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática*, 139-150.

- Barrera, J., & Johana, L. (2014). Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza. *Facultad de Ciencias*.

- CenOposiciones. (1993). Tema 37, la semejanza en el plano. consecuencias. teorema de Thales. razones trigonométricas.
- Colera, J., Olivieira, M.J., Geztelu, I., & Colera, R. (2002). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO. *Anaya,* 182-190.

- Guzmán, M. (2014). Las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos. *Facultad de Ciencias*.

- Lorente, J.L. (…). Tema 37, la semejanza en el plano. consecuencias. teorema de Thales. razones trigonométricas.

5. Fundamentación curricular.

La historia de la Geometría nos muestra que en las últimas décadas se caracteriza por una tendencia del alumnado a memorizar conceptos y propiedades que están basados en otros anteriores y que no han sido comprendidos por el alumnado.

Enseñar Geometría, trae una serie de inconvenientes como la gran dificultad para comprender los conceptos y la frustración por parte del profesorado ante el fracaso de poder llegar a todo el alumnado.

El estudio de la geometría puede resultar difícil en cuanto a su desarrollo formal. Básicamente, porque el profesorado plantea las lecciones y los recursos de la misma manera que él las experimentó, y muchas veces eso, ocasiones un problema a la hora de experimentar y avanzar con las nuevas técnicas que ayuden al alumnado a llevar una enseñanza de la Geometría de forma descubridora y generadora de conocimiento.

Actualmente la Geometría se considera una disciplina importante ya que ocupa una parte del currículo de la Educación Secundaria y tiene una gran influencia en el desarrollo del alumno para las capacidades de comunicación y relación con el entorno.

En Matemáticas, la Geometría ha sido considerada un pilar fundamental para la formación académica del alumno debido a sus diversas aplicaciones y su capacidad para formar razonamiento (Báez e Iglesias, 2007).

Una visión de la Geometría se entiende como (Hernández y Villalba, 2001):

- La ciencia del espacio se ve como una herramienta para medir figuras y como una base para construir modelos del mundo físico.
- Representaciones visuales de otras áreas de las Matemáticas y de otras ciencias.
- Una manera diferente de entender y pensar las Matemáticas.
- Un modelo y un ejemplo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- Una tradicional e innovadora herramienta gracias a aplicaciones gráficas.

Existen Varias investigaciones sobre cómo evoluciona el conocimiento y el aprendizaje en el área de la Geometría y las diferentes situaciones que se dan en el aula por parte de los docentes y de los estudiantes para efectuar un buen aprendizaje (Goncalves, 2006).

Báez e Iglesias (2007) señalan seis principios didácticos que se consideran fundamentales dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría:

- *Principio globalizador o interdisciplinar*: Consiste en un acercamiento con la realidad donde los elementos están relacionados entre sí.
- *Integración del conocimiento:* El conocimiento implica una integración de objetivos, metodología, contenidos y evaluación.
- *Contextualización del conocimiento:* Los conocimientos se adaptan a las necesidades y características del alumnado a partir de unos hechos.
- *Principio de flexibilidad:* La organización del proceso educativo se tiene que adaptar a todo el alumnado cumpliendo con los objetivos.
- *Aprendizaje por descubrimiento:* Todo el proceso de enseñanza tiene que contar con la participación del alumnado de manera que se propicie una investigación y búsqueda de conocimiento.
- *Innovación de estrategias metodológicas:* El grupo docente tiene que buscar estrategias metodológicas para incentivar al alumnado y construir su aprendizaje.

Uno de los objetivos que se pretende alcanzar con la enseñanza de la Geometría, es adecuar al alumnado al medio ambiente para que explore el espacio tridimensional y desarrolle su razonamiento lógico, por lo que la enseñanza de esta materia debe ser atrayente y motivadora.

Los recursos tecnológicos se utilizan como herramientas para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría como por ejemplo la calculadora gráfica o los programas de ordenador. Mediante el programa Cabri II se intenta que los estudiantes descubran los teoremas que se conocen en Geometría.

La Geometría supone ofrecer a los alumnos la posibilidad de entender e interpretar el mundo, resolver problemas, utilizar técnicas de explicación y construir esquemas básicos de situaciones cotidianas entre otros.

Una estrategia metodológica muy popular es el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, que plantea niveles de razonamiento geométrico para que quien aprende geometría se sitúe en un nivel de razonamiento distinto del que estudie algebra o del que estudie cálculo.

Los niveles de Van Hiele se clasifican en cinco de la siguiente forma:

Nivel 1: Visualización o reconocimiento: El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura.
Nivel 2: Análisis: El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.
Nivel 3: Ordenación o clasificación: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado.
Nivel 4: Deducción formal: En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
Nivel 5: Rigor: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta.

Tabla 2 Niveles de Van Hiele. FUENTE: Gilberto Vargas

La metodología para la resolución de problemas se muestra como el alumno como protagonista de su propio aprendizaje por lo que tiene que resolver los problemas con las mismas características que en la vida real de forma coherente lo que lleva al alumnado a resolverlos de forma satisfactoria lo que conllevará a su éxito.

Para que el aprendizaje de la Geometría tenga sentido, es muy importante que se busque un equilibrio entre las habilidades de visualización del problema y su argumentación ya que el ser humano tiende a desarrollar representaciones del mundo que le rodea.

Las clases de Geometría se han basado en el sistema tradicional y los ejercicios se enfatizan en la utilización de las fórmulas de forma repetitiva y memorística, por lo que el alumnado no considera importante estudiar esta materia ya que no ve que se pueda aplicar en la vida cotidiana.

La enseñanza de la Geometría debería centrarse en desarrollar en el alumnado unas habilidades para explorar y visualizar más que memorizar y para ello el profesorado debe aceptar que lo primero son los estudiantes que deben ser los promotores de su aprendizaje y el profesorado servir como un mero guía y facilitarles el proceso.

Las metodologías activas orientadas al aprendizaje de las Matemáticas personalizado son las que mejor funcionan en esta materia, tenemos por ejemplo el aprendizaje colaborativo con proyectos STEM y se ha observado que los alumnos han aumentado su competencia y un mejor rendimiento en la rama de ciencias.

Otra metodología para sacar un buen rendimiento es el aula invertida ya que la mayoría de los bloques de contenidos se pueden grabar o ser creados en aplicaciones Matemáticas en directo, sobre todo si tenemos en cuenta las clases online. Se recomienda que la duración de los videos no supere los 10 minutos y que la exposición sea clara y entretenida para evitar los despistes y el aburrimiento.

6. Proyección didáctica: elaboración de una unidad didáctica.

En este apartado del TFM se va a desarrollar una unidad didáctica de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º de ESO.

6.1 Título

La unidad didáctica se titula **"Problemas métricos en el plano"** en el que va a trabajar las relaciones angulares, la semejanza de figuras, teorema de Pitágoras y áreas de figuras.

6.2 Justificación

Como objeto matemático, la semejanza es una trasformación geométrica que cumple una serie de propiedades, definidas y explicitadas en tratados de Geometría o de Matemáticas generales. Se estudia en 3º de E.S.O de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y se continúa en 4º de E.S.O y 1º de bachillerato.

6.2.1 Descripción del centro

El I.E.S Fuente de la peña, se encuentra localizado en la provincia de Jaén, en la calle Camino Fuente de la Peña, 69. Los barrios cercanos al colegio no son de gran perfil económico por lo que este centro está a la altura económica de cualquier persona. Debido a que el acceso al centro lo realizan alumnos de los barrios cercanos, no es necesario el uso de transporte escolar.

Este centro cuenta con dos sedes, la primera y más grande se encuentra en la calle mencionada anteriormente, que cuenta con los cursos desde 1º de E.SO hasta 2º de bachillerato; la segunda sede se encuentra en la calle Almodóvar, s/n, de Jaén y aquí podemos encontrar la Formación Profesional Básica (FPB), Ciclos Formativos de Grado Medio (CFGM) y Ciclos Formativos de Grado Superior (CFMS) que alberga este centro.

En la sede 1 del centro, podemos encontrar con tres aulas de 1º de E.S.O, tres aulas de 2º de E.S.O, dos aulas de 3º de E.S.O, dos aulas de 4º de E.S.O, cinco aulas de 1º de bachillerato y cinco aulas de 2º de bachillerato, además cuenta con dos laboratorios, uno de química y otro de biología, un aula de música, un aula de dibujo, una biblioteca, un aula de informática, un taller de tecnología, dos patios, uno de ellos cubierto y un gimnasio. También, dispone de un aula de apoyo a la integración en el departamento de orientación. En la sede 2, se encuentran 12 aulas dedicadas a los 6 cursos de formación profesional que oferta este centro.

- Órganos de gobierno

  El equipo directivo está formado por: José Manuel Jiménez Moreno como director, Esther Mª Cabrera Mora como vicedirectora, Mª Trinidad López Arroyo como secretaria, Jesús Alberto Montañés Cobo como jefe de estudios y Antonio cobo Cuevas como jefe de estudios adjunto.

- Órganos de coordinación docente

  Equipos docentes, Equipo de orientación, Equipo técnico de coordinación pedagógica y tutorías.

  El consejo escolar y el claustro de profesores siguen la normativa vigente.

6.2.2 Descripción del aula y del alumnado

El alumnado sobre el que va a tratar esta Unidad Didáctica se encuentra en 3º de E.S.O, al haber dos cursos, se centrará solo en el curso B.

Está formado por 20 alumnos, entre los cuales podemos encontrar un alumno que ha promocionado de curso al ser diagnosticado con altas capacidades y otro alumno en fase de pruebas para diagnosticar altas capacidades.

El aula se encuentra organizada de forma que los alumnos puedan llevar a cabo un aprendizaje colaborativo ya que es una forma nueva de aprender Matemáticas más entretenida. Los alumnos se organizan en parejas de manera equilibrada para que los dos alumnos consigan avanzar en la materia. Las parejas van cambiando al cambiar el trimestre con la finalidad de que se adapten a trabajar con distintos compañeros y creen técnicas nuevas por ellos mismos.

6.3 Objetivos

OBJETIVOS GENERALES DE LA E.S.O
a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática. b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal. c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer. d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos. e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación. f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia. g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades. h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura. j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural. k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación

física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
EN ANDALUCÍA
a) Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades. b) Conocer y apreciar los elementos específicos de la historia y la cultura andaluza, así como su medio físico y natural y otros hechos diferenciadores de nuestra Comunidad, para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

Tabla 3 Objetivos generales. FUENTE: BOE

Según la Orden de 14 de julio de 2016, la enseñanza de las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en la E.S.O, los objetivos son:

OBJETIVOS DE 3º E.S.O
1. Mejorar sus habilidades de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana. 2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados. 3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación. 4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes. 5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación. 6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje. 7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones. 8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado. 9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de

autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las Matemáticas. 10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica. 11. Valorar las Matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual, apreciar el conocimiento matemático acumulado por la humanidad y su aportación al desarrollo social, económico y cultural.

Tabla 4 Objetivos etapa. FUENTE: Orden 14 de Julio 2016

Teniendo en cuenta los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del Real Decreto 1105/2014 y el Decreto 144/2016, los objetivos de la unidad didáctica serían:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA
1. Familiarizarse con las relaciones angulares. 2. Trabajar la semejanza de triángulos y aplicar el Teorema de Thales. 3. Conocer y aplicar el Teorema de Pitágoras. 4. Conocer las cónicas y sus diferentes tipos. 5. Trabajar con las áreas de los polígonos y las figuras curvas. 6. Fomentar el trabajo cooperativo y la participación. 7. Utilizar correctamente las herramientas TIC.

Tabla 5 Objetivos específicos. FUENTE: Real Decreto 1105/2014

6.4 Contenidos

BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS
- Planificación del proceso de resolución de problemas. - Planteamiento de investigaciones Matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. - Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas Matemáticas.
BLOQUE 3. GEOMETRÍA
- Geometría del plano. - Lugar geométrico. - Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. - Traslaciones, giros y simetrías en el plano. - Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tabla 6 Contenidos. FUENTE: BOE

6.5 Competencias clave

Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología. Competencia Digital. Competencia Aprender a Aprender. Competencias Sociales y Cívicas.

Tabla 7 Competencias clave. FUENTE: BOE

6.6 Metodología

La metodología de enseñanza que se lleva a cabo en esta unidad didáctica es la activa llevando a la práctica un aprendizaje colaborativo que garantiza mejores resultados que cuando trabajan de forma individual.

Se adoptarán estrategias interactivas que facilitarán la construcción del conocimiento. Además, se utilizarán las TIC para facilitar el conocimiento y de utilizarán de manera habitual para llevar a cabo la competencia digital.

6.7 Temporalización

SEMANA / / DÍA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
SEMANA 1	Sesión 1	Sesión 2		Sesión 3	Sesión 4
SEMANA 2	Sesión 5	Sesión 6		Sesión 7	Sesión 8
SEMANA 3	Sesión 9	Sesión 10		Prueba escrita	

Tabla 8 Temporalización. FUENTE: Propia

6.8 Sesiones y recursos

- Sesiones:

Sesión: 1	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a ver las relaciones angulares que existen, véase los ángulos en los polígonos y los ángulos en las circunferencias. Se explicará la diferencia entre un ángulo central y un ángulo inscrito. Se enseñarán varios ejemplos y se pondrán con las actividades que hay en el libro. El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 25 min. para la explicación del punto con ejemplos, 20 min. para la realización de las actividades y 10 min. para la corrección de ellas, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: libro de texto, cuaderno, utensilios para escribir y calculadora.	

<table>
<tr><td>Sesión: 2</td><td>Número de alumnos: 20
Duración: 60 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo de la actividad: En esta sesión se va a explicar la semejanza de triángulos y con ello el correspondiente teorema de Thales. Después, realizarán actividades propuestas en el libro y al finalizar, a través del siguiente enlace, realizarán una serie de ejercicios lúdicos para afianzar mejor el tema.
(https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-del-teorema-de-thales.html)

El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 25 min. para la explicación del punto, 15 min. para la realización de las actividades y su corrección y 15 min. para la realización de las actividades de la web, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales: libro de texto, cuaderno y utensilios para escribir, calculadora y una Tablet u ordenador portátil con acceso a internet.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Sesión: 3</td><td>Número de alumnos: 20
Duración: 60 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo de la actividad: En esta sesión se va a ver el teorema de Pitágoras. Seguidamente se les mandarán las actividades propuestas por el libro y, además, tendrán que construir en parejas un problema con ese teorema, resolverlo y explicarlo en clase.

El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 20 min. para la explicación del punto con ejemplos, 15 min. para la realización de las actividades y corrección y 20 min. para la creación del problema, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales: libro de texto, cuaderno, utensilios para escribir y calculadora.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Sesión: 4</td><td>Número de alumnos: 20
Duración: 60 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a ver las aplicaciones del teorema de Pitágoras. Se realizarán algunos ejercicios propuestos del libro y se continuará con ejercicios online para un aprendizaje diferente en el siguiente enlace.
(https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-del-teorema-de-pitagoras.html)

El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 20 min. para la explicación del punto con ejemplos, 15 min. para la realización de las actividades y corrección y 20 min. para la realización de actividades online, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales: libro de texto, cuaderno y utensilios para escribir, calculadora y una Tablet u ordenador portátil con acceso a internet.</td></tr>
</table>

Sesión: 5	**Número de alumnos**: 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a explicar los lugares geométricos (mediatriz, bisectriz…). Se van a realizar actividades propuestas en el libro. En el siguiente enlace, también tendrán una serie de ejercicios interactivos con los que ampliar conocimiento. (https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-de-alturas-medianas-mediatrices-y-bisectrices.html) El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 20 min. para la explicación del punto con ejemplos, 20 min. para la realización de las actividades y 15 min. para las actividades online, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: libro de texto, cuaderno y utensilios para escribir, calculadora y una Tablet u ordenador portátil con acceso a internet.	

Sesión: 6	**Número de alumnos**: 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a ver las cónicas (elipse, parábola, hipérbola…) para ello se utilizará el aula de informática y se hará a través de Geogebra para una clase diferente. (https://www.geogebra.org/classic?lang=es) El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase en el aula de informática, 15 min. para la explicación del punto con ejemplos, 30 min. para la realización de las actividades en Geogebra y 10 min. para recoger el aula y vuelta a clase, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: Libro de texto y aula de informática.	

Sesión: 7	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a ver el área de los polígonos. Se realizarán actividades propuestas por el libro y además se harán grupos para crear un problema, resolverlo y exponerlo en clase. El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 15 min. para la explicación del punto, 10 min. para la realización de las actividades, 20 min para la realización del problema y 10 min. para la exposición, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: libro de texto, cuaderno y material para escribir.	

Sesión: 8	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a ver el área de las figuras curvas. Se realizarán grupos y se repartirán distintas figuras al azar para que hallen el área coloreada de la figura, luego tendrán que exponerlo en la pizarra digital y explicarlo a sus compañeros. El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 20 min. para la explicación del punto, 20 min. para la realización de las actividad y 15 min. para la corrección de ella, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: libro de texto, materiales para escribir, cuaderno y pizarra digital.	

Sesión: 9	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: En esta sesión se van a realizar actividades de repaso de todo el tema y que irán haciendo todos en conjunto. Saldrá un alumno por actividad para resolverla en la pizarra digital. El tiempo estimado para la realización de esta sesión sería de 5 min. para la organización de la clase, 30 min. para la explicación del punto con ejemplos, 25 min. para la realización de las actividades y la corrección de ellas, con lo que se cumplirían los 60 min totales de clase.	
Materiales: Libro de texto, cuaderno, materiales para escribir y calculadora.	

Sesión: 10	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: Esta sesión se utilizará para la revisión de dudas. Se harán ejercicios respectivos a las dudas que tengan los alumnos, saliendo ellos mismos saliendo a la pizarra digital.	
Materiales: libro de texto, cuaderno, utensilios para escribir y calculadora.	

Sesión: 11	**Número de alumnos:** 20 **Duración:** 60 minutos
Desarrollo de la actividad: Realización de una prueba escrita para comprobar los conocimientos adquiridos durante la unidad. (Anexo 1 y 2)	
Materiales: Hoja de examen, utensilios para escribir y calculadora.	

Debido a la situación actual por el CoVid-19, la prueba escrita que se ha realizado para llevarla a cabo en el aula, no se podría realizar, por lo que se han adaptado las preguntas en formato digital para que los alumnos puedan realizar su examen de una forma diferente y no tan monótona. Se ha optado por un cuestionario en la app Quizz (anexos 3, 4, 5, 6) donde los alumnos podrán responder a las preguntas a la misma vez que lo realizan en papel para que al terminar la prueba, puedan subir sus resultados a la plataforma del instituto (Classroom) y así poder comprobar que efectivamente han conseguido los conocimientos esperados.

- Recursos:
  - Libro de texto
  - Utensilios para escribir
  - Ordenador portátil o tablet
  - Pizarra digital
  - Calculadora

6.9 Atención a la diversidad

La atención a la diversidad en la Educación Secundaria se organiza con carácter inclusivo con el objetivo de obtener la adquisición de objetivos y competencias.

Para ello, el ámbito educativo propone, una serie de medidas que ayuden al alumno, en este caso, medidas que fomenten la superdotación ya que en esta clase tenemos un alumno con altas capacidades y aceleración, y un alumno con altas capacidades en fase de pruebas.

En el caso del alumno acelerado, no sería necesario el enriquecimiento del currículo debido a que se encuentra con las mismas capacidades que el resto de sus compañeros. En el caso del niño de altas capacidades, si se optan por medidas extraordinarias para la ampliación de materiales y recursos que están o en algunos casos no, relacionados con el currículo, con el fin de obtener un enriquecimiento individual.

6.10 Evaluación

BLOQUE	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.

	3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes Matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.	3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes Matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
	9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
	12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Bloque 3. Geometría	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos
	2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo

		indirecto de longitudes en contextos diversos.

Tabla 9 Criterios de evaluación. FUENTE: BOE

La evaluación se llevará a cabo a través de una rúbrica (Anexo 7) en la que se comprobará si el alumnado ha conseguido satisfactoriamente los conocimientos impartidos a lo largo de la Unidad Didáctica. La rúbrica está diseñada para que se pueda realizar tanto en una enseñanza en el aula como en la enseñanza online que se está realizando en estos momentos.

7. Conclusiones

Al finalizar este Trabajo Final de Máster, podría realizar una opinion positiva de todos los conocimientos adquiridos y haber obtenido las competencias profesionales para llevar a cabo la profesión docente de la mejor manera posible.

Durante la realización del master, he aprendido a buscar e interpretar la legislación educativa vigente para crear propuestas didácticas según los niveles educativos del alumnado. He visto también la importancia de desarrollar las habilidades sociales para el trato con el alumnado y con las familias durante la formación de loa alumnos y además la importancia que tiene atender a la diversidad de cada uno de ellos.

Además, es muy importante atender a las emociones de cada uno y ejercer como psicólogo en algunas ocasiones ya que es muy importante que los alumnos se sientan escuchados y con eso facilitamos la relación alumno-docente.

Los recursos TIC son tremendamente importantes ya que con ellos podemos realizar las clases mucho más comunicativas y motivadores, si, además, utilizamos recursos innovadores, facilitaría aún más el aprendizaje ya que los alumnos muestran más interés. Desde mi corta experiencia, he observado que no importa el curso de Secundaria al que te enfrentes, siempre les gustará realizar algún juego lúdico por salir de la rutina y aprenderán sin darse cuenta.

A la hora de la práctica en el aula, he observado que el alumnado comete errores básicos como no saber las fórmulas de las áreas a pesar de haberlas estudiado varias veces a lo largo de su formación y creo que es porque no las han entendido, sino memorizado.

Es muy importante realizar una evaluación inicial porque es necesario conocer de dónde parte cada alumno antes de comenzar con el tema, esto nos da una idea de que conocimientos tienen asimilados y en cuales tendremos que poder más empeño. Igualmente, es conveniente realizar una evaluación continua ya que eso nos ayuda a ver una evolución del alumno y no tenemos que esperar hasta la evaluación final en el caso de que se necesite adoptar ciertas medidas en el aprendizaje.

Finalmente, hay que tener en cuenta que los futuros docentes debemos aprender como fusionar las Matemáticas con la didáctica, cosa nada fácil, para poder transmitir un conocimiento adecuado al nivel educativo en el que nos encontremos. Además, es necesario estar preparado para cualquier duda o dificultad que se pueda generar con el alumnado en el caso de que se haya optado por innovar y realizar una actividad de modelización o actividades basadas en proyectos (ABP).

8. Referencias bibliográficas

- Alcaide Guindo, F., Hernández Gómez, J., Moreno Warleta, M., Serrano Marugán, E., Donaire Moreno, J.J. y Pérez, A. (2016). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3 ESO. Savia. Madrid: Ediciones SM.

- Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, *14*(2), 125-142.

- Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87.

- Barrantes, M., Balletbo, I., & Fernández, M. (2014). Enseñar geometría en secundaria. In *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 1-14).

- Barrantes-López, M., & Balletbo-Fernández, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *8*(1), 25.

- Colera Jiménez. J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I. y Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3 ESO. Madrid: Grupo Anaya, S.A.

- Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

- Escudero, I. (…). La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. *Departamento de didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Sevilla.

- Fabres, R. (2016). Estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría utilizadas por docentes de segundo ciclo con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. Universidad de La Frontera.

- García, R. (2011). Figuras semejantes y aplicaciones de la semejanza. Propuesta de una unidad didáctica. Universidad de Granada.

- Goncalves, R. (2006, Enero-Junio). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? Revista Ciencias de la Educación, 1(27), 83-98.

- Guzmán, M. (2014). Las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos. Universidad nacional de Colombia.

- Hernández, V. & Villalba, M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original.

- Macías, R. (2019). Metodologías activas de aprendizaje para Matemáticas en educación secundaria. Universidad politécnica de Madrid.

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado, 223.*

- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

- Orden de 25 de julio de 2008, por la que se regula la atención a la diversidad del alumnado que cursa la educación básica en los centros docentes públicos de Andalucía.

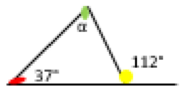
- Vargas, G. & Gamboa, R. (Enero-Junio 2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 1(27), 74-94.

9. Anexos

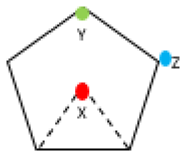
NOMBRE: APELLIDOS:

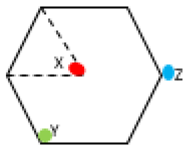
CURSO: FECHA: NOTA:

1) Halla el valor del ángulo α en estos casos:

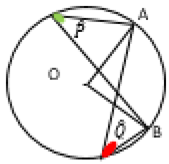


2) Calcula los ángulos X, Y y Z en los siguientes polígonos:

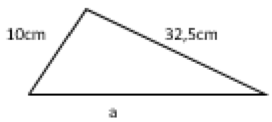




3) Indica cuánto miden los ángulos P y Q, sabiendo que $\widehat{AOB} = 50°$



4) Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:



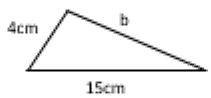
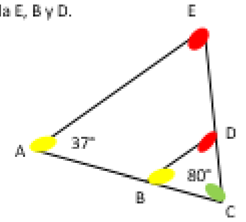


Ilustración 10 Anexo 1. FUENTE: Propia

5) Si BD es paralelo a AE, y AC=15 cm, CE=11cm, BD=6,4cm, AE=18cm.

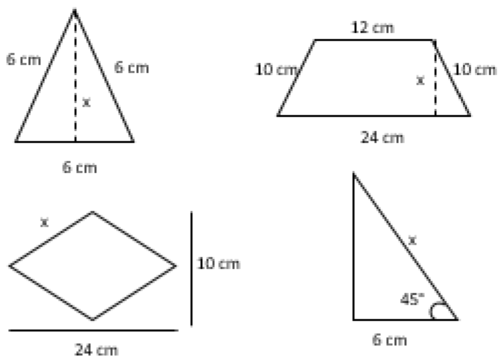
a) Calcula CD y BC

b) Si A=37° y C=80°, halla E, B y D.



6) La diagonal de un rectángulo mide 37cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perimetro.

7) Calcula el valor de x:



8) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo APB es recto?

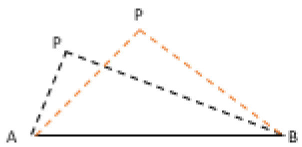


Ilustración 11 Anexo 2. FUENTE: Propia

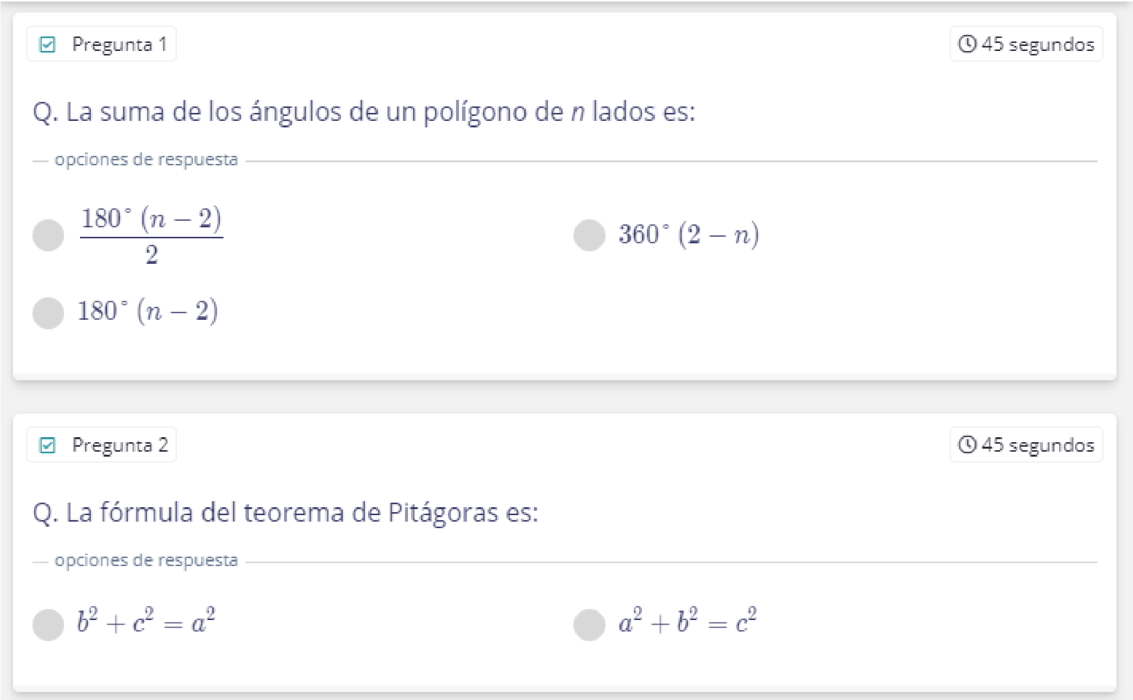


Ilustración 12 Anexo 3. FUENTE: Propia

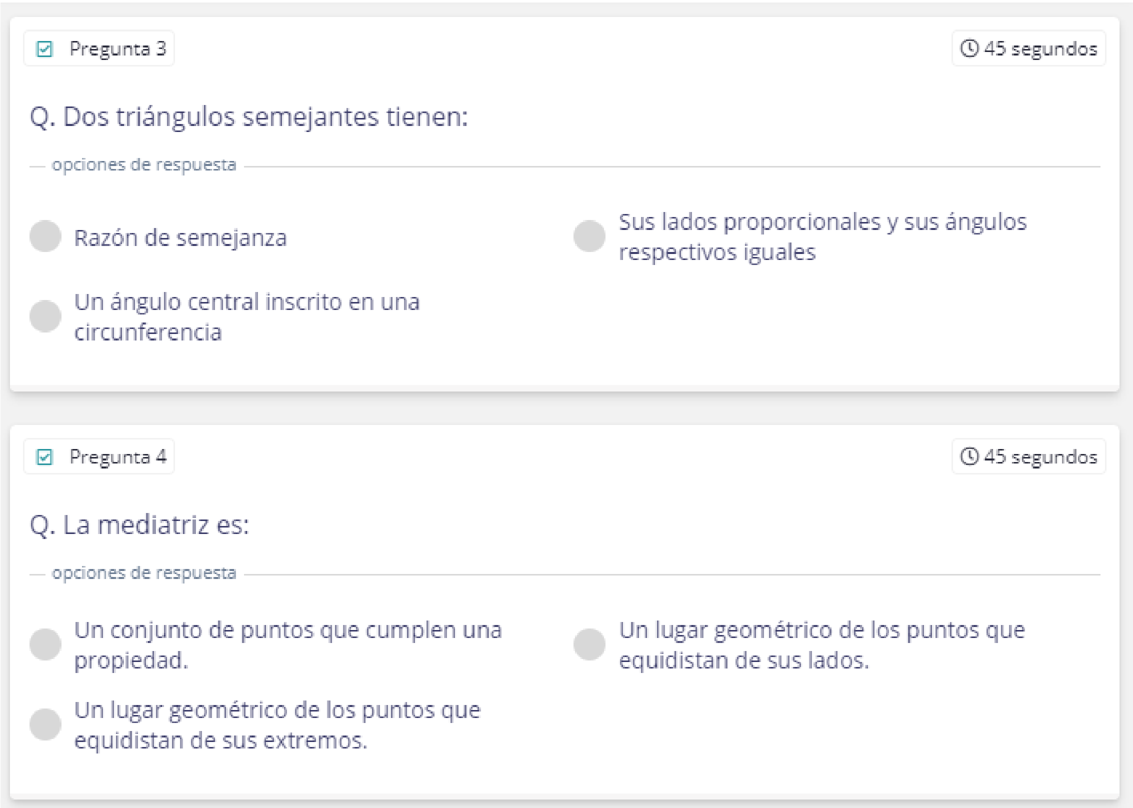


Ilustración 13 Anexo 4. FUENTE: Propia

Pregunta 5 — 45 segundos

Q. Señala la fórmula correcta del área del sector circular:

opciones de respuesta

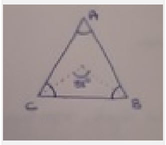
- $A = \pi r^2$
- $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$
- $A = \pi \left(R^2 - r^2\right)$

Pregunta 6 — Sin clasificar — 300 segundos

Q. La diagonal de un rectángulo mide 37 cm y uno de sus lados mide 12 cm. Calcula el perímetro del rectángulo.

Ilustración 14 Anexo 5. FUENTE: Propia

Pregunta 7 — Sin clasificar — 900 segundos

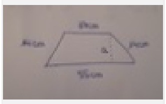


Q. El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?

Pregunta 8 — Sin clasificar — 900 segundos

Q. Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:

Pregunta 9 — Sin clasificar — 900 segundos



Q. Halla el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 37cm y 55cm, y el lado oblicuo 14cm.

Ilustración 15 Anexo 6. FUENTE: Propia

Rúbrica de evaluación			
Criterio	Si	En proceso	No
Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral.			
Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje.			
Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.			
Resuelve problemas geométricos sencillos.			
Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad.			
Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Thales.			
Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares			

Tabla 10 Anexo 7. FUENTE: Propia