



Universidad de Jaén

Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: PROPIEDADES MÉTRICAS

Alumno/a: Galán Molina, Francisco Javier

Tutor/a: Ildfonso Castro López

Dpto: Matemáticas

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Máster correspondiente al Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2021/2022, tiene como objetivo desarrollar y poner en práctica las competencias adquiridas. La temática principal de este trabajo reside en la práctica y transmisión docente de la unidad *Geometría en el espacio* a estudiantes de 2º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas II. Para la realización del trabajo, se ha desarrollado una fundamentación curricular en la que se encuadran los contenidos vigentes según la ley actual, posteriormente se ha incluido un análisis de investigaciones relacionadas con el modelo metodológico de Aprendizaje Basado en Proyectos, al igual que relacionadas con el uso de herramientas TIC como Geogebra para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en la Geometría. Además, se ha desarrollado la fundamentación epistemológica en la que se desarrollan los contenidos del Tema 53 de oposiciones de Matemáticas: Relaciones métricas, perpendicularidad, distancias, ángulos, áreas, volúmenes. Por último, se incluye la elaboración de una unidad didáctica, cuya temática gira en torno a la Geometría en el espacio: Propiedades métricas.

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, Propiedades métricas, Unidad Didáctica, Investigaciones sobre aprendizaje, Bachillerato.

Abstract

This Master's Thesis corresponding to the Master in Teaching of Compulsory Secondary Education and Baccalaureate, Vocational Training and Language Teaching, in the specialty of Mathematics, in the academic year 2021/2022, aims to develop and put into practice the skills acquired. The main theme of this work is Geometry in space, applied to students of 2nd year of Bachillerato in the subject of Mathematics II. For the realization of the work, a curricular foundation has been developed in which the current contents according to the current law are framed, then an analysis of research related to the methodological model of Project Based Learning has been included, as well as related to the use of ICT tools such as Geogebra to promote the teaching and learning process in Geometry. In addition, the epistemological foundation has been developed in which the contents of Topic 53 of the Mathematics competitive examinations are developed: Metric relations, perpendicularity, distances, angles, areas, volumes. Finally, it includes the development of a didactic unit, whose theme revolves around the main theme revolves around Geometry in space: Metric properties.

Keywords: Mathematics, Geometry, Metric Properties, Didactic Unit, Learning Investigations, High School.

Índice general

1	Introducción	7
2	Objetivos	8
3	Fundamentación curricular	10
3.1	Contextualización de los contenidos dentro del currículum	10
3.2	Análisis comparativo: características, métodos y recursos de libros de texto . . .	14
4	Fundamentación epistemológica. Desarrollo del Tema 53: Relaciones métricas.	17
4.1	Introducción	17
4.2	Ángulo formado por dos rectas.	18
4.3	Ángulo formado por dos planos.	20
4.4	Ángulo formado por recta y plano	21
4.5	Distancia entre dos puntos	22
4.6	Distancia de un punto a un plano	23
4.7	Distancia entre un punto y una recta.	24
4.8	Distancia entre una recta y un plano.	25
4.9	Distancia entre dos rectas	25
4.10	Cálculo de áreas	27
4.11	Cálculo de volúmenes	28
5	Fundamentación didáctica: investigaciones sobre enseñanza y/o aprendizaje	29
5.1	Metodología enseñanza y aprendizaje basado en proyectos	30
5.1.1	Justificación de ABP	30
5.1.2	Metodología ABP	31
5.1.3	Aplicación de ABP a la Geometría	33
5.2	Geogebra, una herramienta para la visualización y razonamiento geométrico. . .	35
6	Proyección didáctica	37
6.1	Título	37
6.2	Justificación	37
6.3	Contextualización del centro y del aula	37
6.3.1	Ubicación geográfica del centro	38
6.3.2	Aspectos demográficos y socio-económicos de la localidad	39
6.3.3	Datos del centro	40
6.3.4	Características del alumnado	40
6.4	Objetivos	41
6.4.1	Objetivos generales de la etapa (Bachillerato)	41
6.4.2	Objetivos generales del área (Matemáticas II)	43
6.4.3	Objetivos didácticos de la unidad.	43
6.5	Competencias clave	44
6.6	Contenidos	45
6.7	Metodología	48
6.8	Actividades y recursos	49
6.8.1	Actividades	49

Índice general

6.8.2	Materiales y recursos	50
6.9	Atención a la diversidad	51
6.10	Temporalización	52
6.11	Evaluación	53
6.11.1	Procedimiento de evaluación	53
6.11.2	Calificación final	54
6.11.3	Evaluación de los procesos de enseñanza: autoevaluación docente	55
6.12	Desarrollo pormenorizado de las sesiones	56
7	Conclusiones	63
8	Bibliografía	64
9	Anexos	66

Índice de figuras

3.1	Comparativa cuantitativa de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)	15
3.2	Comparativa porcentual de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)	15
3.3	Comparativa porcentual de las dificultades de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)	16
4.1	Ángulo formado entre una recta y un plano. (Elaboración propia)	21
4.2	Distancia de un punto a un plano (Elaboración propia)	23
4.3	Distancia de un punto a una recta (Elaboración propia)	24
4.4	Distancia de rectas que se cruzan (Elaboración propia)	26
4.5	Paralelogramo formado por los vectores \vec{AB} y \vec{AC} (Elaboración propia)	27
4.6	Paralelepípedo definido por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} . (Elaboración propia)	28
5.1	Comparativa esquemática entre el sistema tradicional y el modelo ABP (Elaboración propia)	31
6.1	Fachada IES Acebuche. (Fuente: AcebucheDigital)	38
6.2	Ubicación IES Acebuche. (Fuente: GoogleMaps)	38
6.3	Torredonjimeno - Habitantes según lugar de nacimiento - 2021. (Elaboración Propia. Fuente INE)	40
9.1	Método del producto mixto para cálculo de dos rectas que se cruzan. (Elaboración propia)	69
9.2	Representación rectas r y s usando Geogebra. Comprobación distancia entre rectas. (Elaboración propia)	70

Índice de cuadros

3.1	Comparativa de Bloques de contenidos entre editoriales. (Elaboración propia) . . .	11
3.2	Comparativa de contenidos entre editoriales. (Elaboración propia)	13
3.3	Comparativa cuantitativa de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)	14
6.1	Datos de interés - Localidad de Torredonjimeno. (Elaboración propia. Fuente: INE)	39
6.2	Objetivos generales en el currículo de Bachillerato (Elaboración propia)	42
6.3	Objetivos generales en el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía (Elaboración Propia)	42
6.4	Objetivos generales de la materia Matemáticas II. (Elaboración propia)	43
6.5	Objetivos didácticos de la unidad específica desarrollada. (Elaboración propia) .	44
6.6	Competencias clave de etapa de Bachillerato en la comunidad Autónoma de Andalucía (Elaboración propia)	44
6.7	Bloque IV: Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables. (Elaboración propia)	46
6.8	Bloque I, Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables. (Elaboración propia)	47
6.9	Tipo de actividades didácticas (Luque-Cañada, 2018)	50
6.10	Temporalización asignatura Matemáticas II en el curso completo. (Elaboración Propia)	53
6.11	Ponderaciones para la calificación final del alumnado (Elaboración propia)	54
6.12	Rúbrica de autoevaluación docente (Elaboración propia)	55
6.13	Desarrollo de la sesión 1: Introducción. (Elaboración propia)	56
6.14	Desarrollo de la sesión 2: Introducción a los problemas métricos. (Elaboración propia)	57
6.15	Desarrollo de la sesión 3: Medida de ángulos entre rectas y planos. (Elaboración propia)	57
6.16	Desarrollo de la sesión 4: Distancia entre puntos rectas y planos. (Elaboración propia)	58
6.17	Desarrollo de la sesión 5: Distancia entre puntos rectas y planos (Continuación). (Elaboración propia)	59
6.18	Desarrollo de la sesión 6: Medida de áreas y volúmenes en el espacio. Gamificación. (Elaboración propia)	60
6.19	Desarrollo de la sesión 7: Uso de herramienta CAD para representación de diferentes entidades geométricas (Elaboración propia)	60
6.20	Desarrollo de la sesión 8: Repaso general. Problemas de selectividad. (Elaboración propia)	61
6.21	Desarrollo de la sesión 9: Prueba individual: Examen. (Elaboración propia)	61
6.22	Desarrollo de la sesión 10: Resolución de la prueba individual. Exposición del trabajo grupal. (Elaboración propia)	61
6.23	Desarrollo de la sesión 11: Actividades de ampliación y recuperación. (Elaboración propia)	62
9.1	Rúbrica evaluativa del trabajo grupal. (Elaboración propia)	71
9.2	Rúbrica evaluativa del examen escrito. (Elaboración propia)	72

Índice de cuadros

9.3	Rúbrica evaluativa de las actividades propuestas (Elaboración propia)	72
9.4	Rúbrica evaluativa de la participación en clase. (Elaboración propia)	73

1 Introducción

El presente documento se enmarca en el contexto del Trabajo Fin del Máster Universitario en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, dentro de la especialidad de Matemáticas, donde se muestran y se aplican los conocimientos adquiridos durante el año 2021/2022 en la Universidad de Jaén y es evaluado dentro de la asignatura «*Trabajo Fin de Máster*» con una carga lectiva de 6 créditos y de carácter obligatorio.

El tema abordado en este documento se contextualiza en la asignatura de Matemáticas II de Bachillerato y más concretamente, en la unidad didáctica de *Geometría en el espacio: Relaciones métricas*, dentro del Bloque de Geometría.

Primeramente, se encuadrará la unidad didáctica realizando un análisis curricular haciendo uso de la disposición curricular vigente. Para ello, se describirán los contenidos definidos por la legislación en dicha asignatura, con sus correspondientes criterios de evaluación y se hará un análisis de dos libros de texto con los que se pretende comprobar y verificar la coherencia entre los documentos oficiales de ámbito nacional con el desarrollo de contenidos de las diferentes editoriales, con objeto de comprobar si se rigen por la normativa. Se incluirá y analizará también las diferencias principales que existen entre ambos libros.

Posteriormente se describirá una fundamentación epistemológica de dicha unidad, en la que se analizarán y desarrollarán matemáticamente los contenidos curriculares con cierta profundidad y rigor matemático. Tras una breve introducción en la que se define formalmente el concepto de Espacio afín y producto escalar, pasaremos a desarrollar formalmente el Tema 53 de oposiciones que incluye los conceptos geométricos de perpendicularidad, paralelismo, distancias, ángulos, áreas y volúmenes.

Por otro lado, se ha hecho un análisis de fundamentación didáctica, en la que se analizarán las diferentes metodologías que se van a usar para tratar de resolver las dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje relacionadas con esta unidad. La apuesta metodológica que desarrolla este trabajo reside, por un lado, en la aplicación de la metodología enseñanza y aprendizaje basado en proyecto (ABP), y por otro lado, en la importancia del uso de las TIC y en particular, el uso de Geogebra, que facilitará enormemente la realización de las tareas que favorezcan la reflexión y el razonamiento geométrico.

Por último, se desarrollará una unidad didáctica teniendo en cuenta todos los recursos que se han estudiado en los análisis anteriores. Se han considerado todos los elementos necesarios para que la unidad sea aplicable a un caso real. Para ello, se ha incluido la contextualización del centro y aula específicos, así como la temporalización de la unidad, contenidos, competencias y metodologías a implementar. Para acabar, se ha incluido el desglose de las diferentes sesiones que se llevarán a cabo con el fin de poder darle uso en un futuro con un plan de clase definido.

En definitiva, la realización de este Trabajo Fin de Máster está motivado por la mejora de los procesos metacognitivos en las tareas de enseñanza y aprendizaje. La idea principal será evaluar qué herramienta didáctica y metodología se amolda mejor a la temática elegida. Para el desarrollo del trabajo, siempre nos basaremos en la legislación vigente actual que define los contenidos de la unidad y los criterios que se deben llevar a cabo para favorecer el aprendizaje de los alumnos.

2 Objetivos

En los objetivos de este Trabajo Fin de Máster destacaremos dos variantes: los de aprendizaje relacionados con la aplicación de conocimientos obtenidos durante la realización del Máster; así como los didácticos, relacionados con la enseñanza y la docencia de la Geometría en Bachillerato.

De entre los objetivos de aprendizaje relacionados con el Máster destacaremos:

- Investigar y llevar a cabo nuevas técnicas metodológicas que mejoren la labor docente.
- Innovar, desarrollar y diseñar un proyecto educativo que sea capaz de dar respuestas a las dificultades de los alumnos haciendo uso de diferentes propuestas metodológicas.
- Fomentar las capacidades competenciales del profesorado con el objetivo de proyectarlas en el aula, utilizando propuestas innovadoras y tratando de evitar los enfoques o perspectivas simplistas y tradicionales.
- Proporcionar una mayor responsabilidad al alumnado en su propio aprendizaje, de tal forma que puedan aplicarlo a problemas reales de su vida diaria haciendo uso de los diferentes conocimientos y habilidades adquiridas. Encaminar a los estudiantes a situaciones en las que tengan la necesidad de aplicar lo aprendido y lo utilicen a modo de herramienta para la resolución de problemas y tareas.
- Proponer y aplicar mejoras que incrementen la obtención de aptitudes tales como la inteligencia emocional, creatividad, iniciativa, trabajo en equipo o la resolución de problemas complejos.
- Poner en práctica los conocimientos y competencias adquiridos en el Máster.
- Realizar una programación didáctica contextualizada en la legislación actual considerando los requisitos del sistema educativo actual, adaptada al contexto social y teniendo en cuenta necesidades académicas del alumnado
- Mejorar el desarrollo académico y personal del alumnado conociendo sus dificultades de aprendizaje y aplicando la metodología adecuada teniendo en cuenta las características del alumnado, así como sus motivaciones o contexto social.
- Ser consciente de la diversidad de recursos disponibles en el ámbito educativo que favorecen la labor docente.

Por otro lado, en los objetivos didácticos, relacionados con la enseñanza y la docencia de la Geometría en Bachillerato:

- Analizar las dificultades que se dan tanto en la enseñanza por parte del docente, como profundizar en cómo mejorar el aprendizaje del alumnado en la Geometría espacial
- Dar la posibilidad al alumnado de alcanzar aprendizajes significativos, mediante el estímulo del razonamiento, la reflexión y la profundización, para que puedan relacionarlos con otras áreas y y aplicarlos en su vida diaria.
- Incluir en la enseñanza metodologías que faciliten la interiorización y la comprensión de la Geometría espacial, así como el desarrollo de las competencias matemáticas propias de los objetivos de Bachillerato. Para ello, se hará uso de metodologías basada en proyectos y el uso de herramientas TIC que incluyan programas de geometría dinámica, como Geogebra,

2 *Objetivos*

para aumentar la motivación del alumnado y fomentar la realización de actividades.

- Desarrollar la comprensión y visualización geométrica en el alumnado, así como remarcar la importancia de su estudio, así como sus aplicaciones prácticas.

3 Fundamentación curricular

En este apartado procederemos a encuadrar la unidad didáctica a desarrollar realizando un análisis curricular utilizando las disposiciones curriculares vigentes. Para ello, se describirán los contenidos definidos por la legislación en la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato, con sus correspondientes criterios de evaluación. Este análisis, se realizará desde la perspectiva del currículum desarrollado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Para el análisis utilizaremos dos libros de texto:

- Matemáticas II (J. Colera Jiménez, M^a José Oliveira González). Editorial ANAYA (2016)
- Matemáticas II. Proyecto La Casa del Saber. Editorial: SANTILLANA (2009)

con los que se pretende comprobar y verificar la coherencia entre los documentos oficiales de ámbito nacional con el desarrollo de contenidos de las diferentes editoriales, con objeto de comprobar si se rigen por la normativa. Por otra parte, analizaremos la evolución en el modo de impartir los contenidos que ha tenido esta unidad didáctica a lo largo del tiempo; es por esta razón por la que se han elegido dos libros de texto encuadrados en diferentes legislaciones curriculares.

3.1 Contextualización de los contenidos dentro del currículum

Según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, dentro del currículum de la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato, se sitúa la unidad «Propiedades métricas» dentro del Bloque IV: Geometría. A continuación, desglosaremos y estudiaremos en primer lugar los bloques definidos, pasando posteriormente por los contenidos de cada bloque y acabando con la unidad estudiada en cuestión.

La ordenación de bloques según la legislación viene dada por:

- Bloque I: Procesos, métodos y actitudes matemáticas (Bloque transversal)
- Bloque II: Números y álgebra
- Bloque III: Análisis
- Bloque IV: Geometría
- Bloque V: Estadística y probabilidad

Las editoriales elaboran el contenido de sus libros teniendo en cuenta la legislación vigente; sin embargo, algunos libros de texto cambian la ordenación de los bloques.

Cuadro 3.1: Comparativa de Bloques de contenidos entre editoriales. (Elaboración propia)

SANTILLANA (2009)	ANAYA (2016)
Bloque I. Álgebra	Bloque I. Álgebra
Bloque II. Geometría	Bloque II. Geometría
Bloque III. Análisis	Bloque III. Análisis
-----	Bloque IV: Estadística y Probabilidad

Como se puede observar en el cuadro 3.1 existe una clara diferencia entre ambos libros: El bloque de Estadística y Probabilidad no existía en la legislación anterior.

En el libro de ANAYA, sí que contamos con los bloques definidos por la legislación. En este caso, la editorial ha visto conveniente situar el Bloque de Geometría justo después del bloque de Álgebra. Esta decisión puede estar influenciada por la gran relación que existen entre ambas ramas de las Matemáticas, siendo evidente que es necesario haber definido la base de Álgebra en la que se fundamenta todo el desarrollo geométrico. En ambos libros se ha tomado esta decisión y el bloque de Análisis se desarrolla justo después.

Ha de notarse que el Bloque I de Procesos y métodos matemáticos se encuentra integrado de forma implícita y transversal en los contenidos de ambos libros.

Una vez encuadrado el bloque de Geometría, pasamos a analizar los contenidos propuestos por la legislación, así como sus criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para cada uno de ellos: (Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.)

1. VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL, PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO.

Criterios Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.

Estándares Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.

2. ECUACIONES DE LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO. POSICIONES RELATIVAS (INCIDENCIA, PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANO)

Criterios Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.

Estándares:

- Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.
- Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente
- Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.
- Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

3. PROPIEDADES MÉTRICAS (CÁLCULO DE ÁNGULOS, DISTANCIAS, ÁREAS Y VOLÚMENES)

Criterios Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias,

3 Fundamentación curricular

áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.

Estándares:

- Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.
- Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.
- Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.
- Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

Los libros de texto objeto en este análisis han desarrollado el contenido de sus libros teniendo en cuenta la legislación vigente aplicable a cada uno de ellos. Si comparamos, en el cuadro 3.2 los contenidos dentro del bloque de Geometría han sido desarrollado de forma claramente diferente:

En el libro de ANAYA, editado en 2016, si que se asemeja en un mayor grado a la ordenación propuesta por la normativa. En el primer tema se definen las herramientas matemáticas y cómo trabajar con ellas (concepto de vectores en el espacio, expresión analítica, dependencia e independencia lineal, etc), posteriormente se dedica un tema para definir los diferentes elementos geométricos en el espacio (recta, punto y plano) así como diferentes posiciones afines entre ellos y para terminar, en el último tema, que es el elegido como objeto de estudio en el desarrollo de trabajo, se tratan los diferentes procedimientos métricos para resolver diferentes problemas afines.

Por otro lado, si estudiamos el desarrollo de las diferentes unidades del libro de SANTILLANA, editado en 2009, es fácil darse cuenta que la ordenación de los contenidos propuestos no se relacionan directamente con la legislación actual. Vemos cómo la legislación actual propone dedicar el primer tema exclusivamente a *Vectores en el espacio*, siendo este una introducción generando una base de herramientas matemáticas para utilizar en los siguientes temas. Sin embargo, esta editorial hace la división de unidades de otra forma, se define cada concepto con un enfoque práctico dentro del mismo tema.

A modo de conclusión, la metodología elegida para desarrollar los contenidos si elegimos un libro u otro, puede variar, ya que como hemos mostrado, los objetivos de cada uno de los libros es diferente.

En el libro de SANTILLANA, la estructuración de los contenidos es más difusa, ya que en cada tema se introducen los contenidos necesarios para definir otros conceptos relacionados. *Ejemplo: en el tema de Producto escalar se define el producto escalar para posteriormente utilizarlo en el cálculo de ángulos entre dos rectas (dentro del mismo tema)*

En el libro de ANAYA se ve claramente una estructuración más definida, en el que cada tema se utiliza con un fin concreto. *Ejemplo. En el tema Vectores en el espacio se define el producto escalar, ubicándose las aplicaciones geométricas de este concepto integradas en otra unidad.*

Cuadro 3.2: Comparativa de contenidos entre editoriales. (Elaboración propia)

SANTILLANA (2009)	ANAYA (2016)
<p>GEOMETRÍA EN EL ESPACIO:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Vectores en el espacio • Combinación lineal de vectores • Coordenadas de un vector • Operaciones en coordenadas • Aplicaciones de los vectores • Ecuaciones de la recta en el espacio • Ecuaciones del plano en el espacio • Posiciones relativas entre dos rectas, recta y plano, dos planos y tres planos <p>PRODUCTO ESCALAR:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Producto escalar • Aplicaciones del producto escalar • Perpendicularidad entre recta y plano • Haces de planos • Ángulos en el espacio • Proyecciones ortogonales • Puntos simétricos • Distancias <p>PRODUCTO VECTORIAL:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Producto vectorial • Aplicaciones del producto vectorial • Áreas de figuras planas en el espacio • Distancia de un punto a una recta • Producto mixto • Volúmenes de cuerpos geométricos • Distancia entre dos rectas que se cruzan • Lugares geométricos en el espacio • La superficie esférica 	<p>VECTORES EN EL ESPACIO:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Operaciones con vectores • Expresión analítica de un vector • Producto escalar de vectores • Producto vectorial • Producto mixto de tres vectores <p>PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sistema de referencia en el espacio • Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos • Ecuaciones de la recta • Posiciones relativas de dos rectas • Ecuaciones del plano • Posiciones relativas de planos y rectas • El lenguaje de las ecuaciones: variable, parámetros, ... <p>PROBLEMAS MÉTRICOS:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Direcciones de rectas y planos • Medida de ángulos entre rectas y planos • Distancias entre puntos, rectas y planos • Medidas de áreas y volúmenes • Lugares geométricos en el espacio

Fuente Libros:

Matemáticas II (J. Colera Jiménez, M^a José Oliveira González). Editorial ANAYA (2016)

Matemáticas II. Proyecto La Casa del Saber. Editorial: SANTILLANA (2009)

3.2 Análisis comparativo: características, métodos y recursos de libros de texto

La utilización de un libro de texto en el aula de matemáticas se ha ido integrando de forma generalizada desde los inicios de la educación hasta la actualidad. Esto ha generado una práctica escolar que está directamente determinada por el uso del mismo. Teniendo en cuenta esto, es importante analizar la estructura de los mismos, así como sus características y recursos.

En este apartado se estudiarán las diferentes características relacionadas con la exposición de los contenidos propuestas por ambos libros así como los recursos utilizados para el desarrollo de los mismos: cantidad de ejercicios, tipos, dificultad, etc.

Comenzamos estudiando la estructura y características comunes de ambos libros. Los contenidos están divididos en bloques en los que se desarrollan los diferentes temas según los conceptos a enseñar/aprender. En cada uno de los temas existen numerosas explicaciones detalladas de los conceptos, así como ejemplos relacionados con los mismos. Durante el desarrollo de los conceptos se incluyen ejercicios y ejemplos resueltos y se proponen actividades para resolver y afianzar los contenidos del mismo. Al final de cada tema, en ambos libros, se incluye una lista de ejercicios y problemas resueltos y otra lista de problemas propuestos para afianzar todos los conceptos importantes del mismo.

En el libro de ANAYA, se incluye además una lista de ejercicios guiados, en las que no se determina la resolución completa, sino que se dan unas breves pautas a seguir, así como la solución del problema.

A continuación se ha realizado un estudio comparativo entre ambos libros de texto, en el que analizamos los diferentes tipos de ejercicios incluidos, así como la cantidad y dificultad de los mismos. En el cuadro 3.3 se ha recolectado la cantidad de ejercicios de cada tipo y libro.

Cuadro 3.3: Comparativa cuantitativa de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)

Tipo de problema	ANAYA	SANTILLANA
Ejercicios de reconocimiento de conceptos	23	32
Ejercicios resueltos en el desarrollo de conceptos	15	15
Ejercicios resueltos al finalizar la unidad	11	8
Ejercicios guiados	5	0
Ejercicios y problemas propuestos al final del tema	84	132
Autoevaluación "Propiedades métricas"	6	7
Autoevaluación "Bloque IV: Geometría"	18	105

3 Fundamentación curricular

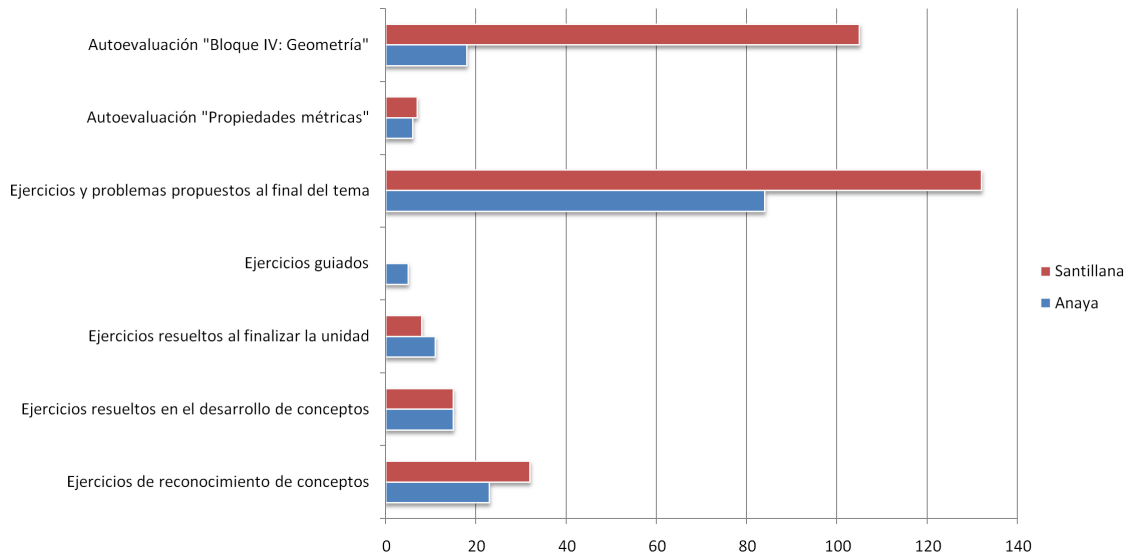


Figura 3.1: Comparativa cuantitativa de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)

En la figura 3.1 vemos que la editorial SANTILLANA presenta un mayor número de actividades en general que la editorial ANAYA, sobre todo destacamos los ejercicios de Autoevaluación pertenecientes al bloque completo de Geometría. Realizando un análisis porcentual, en la figura 3.2 vemos que las diferencias más claras corresponden a lo citado anteriormente. Otro apunte significativo es que la editorial de ANAYA, le da más peso a los ejemplos y ejercicios resueltos de reconocimiento de conceptos durante el desarrollo del tema. Por último, vemos en la editorial ANAYA se incluyen ejercicios guiados, algo que no ocurre en el libro de SANTILLANA.

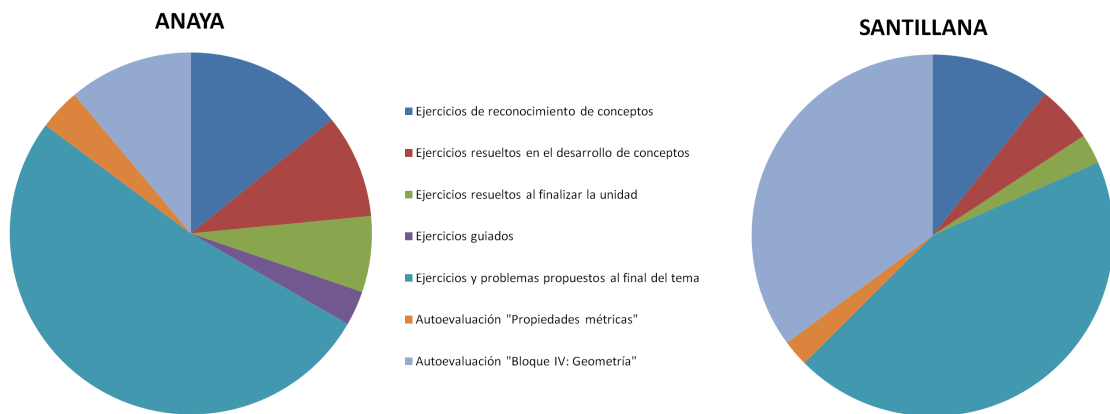


Figura 3.2: Comparativa porcentual de los diferentes tipos de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)

En cuanto a la dificultad de los ejercicios propuestos por ambas editoriales vemos un comportamiento similar (Figura 3.3), la mayoría de los ejercicios propuestos tienen una dificultad intermedia, seguidos de ejercicios de dificultad básica y por último ejercicios de dificultad alta o de modelización. Cabe destacar que en la editorial de ANAYA también se incluyen ejercicios teóricos, cosa que no ocurre en SANTILLANA.

3 Fundamentación curricular

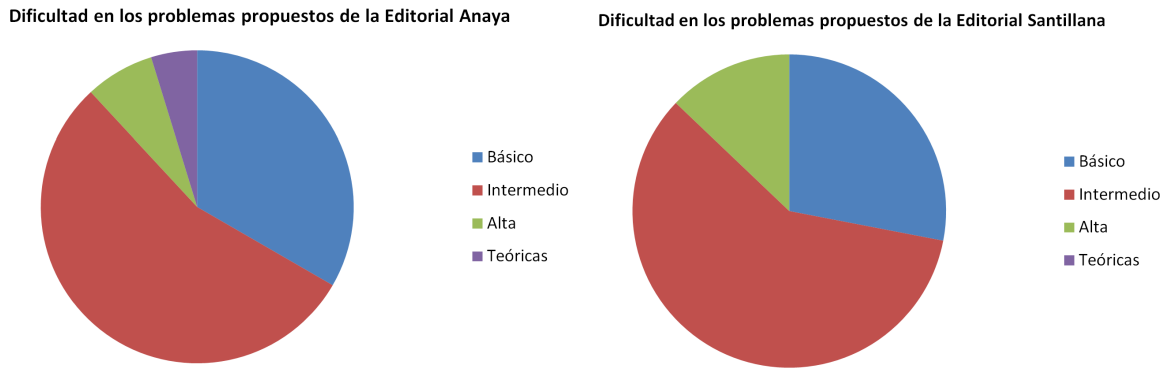


Figura 3.3: Comparativa porcentual de las dificultades de ejercicios para cada libro. (Elaboración propia)

La lectura que podemos realizar de estos datos es que la editorial ANAYA probablemente ha apostado más por presentar los contenidos de una forma más escalonada, tratando de ayudar al alumno a afianzar los contenidos, aportando muchos ejercicios resueltos así como ejemplos y ejercicios guiados.

Por otro lado, en la editorial SANTILLANA destaca la gran cantidad de ejercicios propuestos, probablemente para incluir más variedad de ejercicios y favorecer que el alumno interiorice correctamente los mecanismos de resolución de problemas.

Cabe destacar que ninguna de estas dos editoriales proponen actividades que puedan ser tratadas o planteadas de un modo cooperativo. Además, tampoco se incluyen actividades de modelización matemática aplicada a un caso real. Es por esto, que el libro de texto debe ser utilizado como apoyo para las clases, pero está en la labor del docente enriquecer el repertorio de tareas y aumentar las metodologías usadas con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados potenciando el desarrollo de las competencias clave desde una perspectiva transversal.

4 Fundamentación epistemológica.

Desarrollo del *Tema 53: Relaciones métricas.*

En este apartado se desarrollará la fundamentación epistemológica del *Tema 53: Relaciones métricas: Perpendicularidad, distancias, ángulos, áreas, volúmenes.*¹ El eje constructor de las relaciones métricas lo constituye el concepto de espacio afín n-dimensional asociado a un espacio vectorial y se utiliza para definir el concepto de producto escalar y norma de un vector, que serán necesarios para el desarrollo del tema.

4.1 Introducción

Espacio afín

Un *espacio afín* sobre un cuerpo K es un conjunto $A \neq \emptyset$, un espacio vectorial E y una aplicación (Castellet, 1991)

$$\varphi = A \times A \longrightarrow E$$

que cumple las siguientes condiciones

- Condición 1: $\begin{array}{ccc} \varphi_P : & A & \longrightarrow & E \\ & Q & \longrightarrow & \varphi(P, Q) \end{array}$ es biyectiva $\forall P \in A$
- Condición 2: $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R) \quad \forall P, Q, R \in A$

Además denotaremos,

$$\varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

y se dirá que P y Q son, respectivamente, el *origen* y el *extremo* del vector \overrightarrow{PQ} . De tal forma que la condición 2 la expresaremos como:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Producto escalar

Se define *el producto escalar* sobre un espacio vectorial E como una aplicación (Castellet, 1991).

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longrightarrow & \langle u, v \rangle \end{array} \quad \forall u, v \in E$$

que cumple los siguientes 4 axiomas:

¹El libro de Lemann (1956) ha servido como referencia para el desarrollo de este capítulo

- Simétrico:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in E$$

- Definida positivo:

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle &\geq 0 \quad \forall u \in E \\ \langle u, u \rangle = 0 &\iff u = \vec{0} \quad \forall u \in E \end{aligned}$$

- Función bilineal que verifica

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in E$$

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in E$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

En el desarrollo de este tema, vamos a trabajar en el espacio afín 3-dimensional, considerando el conjunto de puntos del espacio con \mathbb{R}^3 como espacio vectorial subyacente. Además, por simplicidad, notaremos el producto escalar como:

$$\langle u, v \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

siendo \vec{u} y \vec{v} vectores pertenecientes a \mathbb{R}^3 .

Por otro lado, diremos que $\| \cdot \|$ es la norma del vector \vec{u} , lo expresaremos como $\| \vec{u} \|$ y se define como:

$$\| \vec{u} \| = +\sqrt{\langle u, u \rangle} = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Para concluir, nótese que un espacio vectorial con un producto escalar $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denominará *espacio afín Euclídeo* y lo utilizaremos para definir el concepto de distancia.

4.2 Ángulo formado por dos rectas.

El ángulo que forman dos rectas dependerá de las posiciones relativas que formen entre ellas. Suponiendo que los vectores directores de la recta r_1 y r_2 son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ respectivamente, entonces:

- Si las rectas r_1 y r_2 se cortan, el ángulo que forman es el menor de los ángulos en el plano que determinan, es decir, el ángulo recto o agudo que determinan.
- Si las rectas no se cortan sino que se cruzan, el ángulo formado será el mismo que el que formen dos rectas secantes paralelas a ellas. Si denotamos este ángulo como α y aplicamos la definición y propiedades del producto escalar de dos vectores entonces:

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \quad (4.1)$$

Nótese que el valor absoluto del numerador indica que el valor del coseno será positivo, de tal forma que aseguramos que el ángulo que forman dos rectas se encuentre definido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Paralelismo y perpendicularidad

Definición. Diremos que las rectas r_1 y r_2 son paralelas y lo notaremos como $r_1 \parallel r_2$, cuando el ángulo α que forman entre ellas sea cero.

$$r_1 \parallel r_2 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = 0$$

Proposición. Dos rectas son paralelas si y solo sí, sus vectores directores son proporcionales:

$$\alpha = 0 \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Demostración.

Si el ángulo α que forman las rectas es nulo entonces podemos escribir:

$$\alpha = 0 \iff \cos \alpha = 1 \iff (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

Operando y redistribuyendo los términos de la ecuación anterior se tiene que

$$2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3 = u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2$$

La ecuación anterior se cumple cuando se verifica que la suma de los siguientes términos es nula

$$(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - v_1u_3)^2 + (u_2v_3 - v_2u_3)^2 = 0 \iff \begin{cases} u_1v_2 - u_2v_1 = 0 \\ u_1v_3 - v_1u_3 = 0 \\ u_2v_3 - v_2u_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\alpha = 0 \iff \begin{cases} u_1v_2 - u_2v_1 = 0 \\ u_1v_3 - v_1u_3 = 0 \\ u_2v_3 - v_2u_3 = 0 \end{cases} \iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \quad cqd \quad (4.2)$$

Definición. Diremos que dos rectas son perpendiculares y lo notaremos como $r_1 \perp r_2$, cuando el ángulo α que forman entre ellas sea $\frac{\pi}{2}$.

$$r_1 \perp r_2 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Proposición. Dos rectas son perpendiculares, si y solo si, el producto escalar de los vectores directores es nulo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Demostración.

Si las rectas son perpendiculares, es inmediato ver que

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \cos \alpha = 0$$

Usando la definición de ángulo entre rectas tenemos:

$$\cos \alpha = 0 \iff u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad cqd \quad (4.3)$$

4.3 Ángulo formado por dos planos.

El ángulo formado por dos planos viene determinado por el ángulo que forman sus correspondientes vectores normales asociados a cada uno de los planos. Supongamos dos planos con π_1 y π_2 con vectores normales a \vec{n} y \vec{n}' respectivamente, entonces el ángulo α entre ambos planos será:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n}'\|} \quad (4.4)$$

Si expresamos los planos usando su ecuación general $\pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi_2 : A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Entonces

$$\alpha = \arccos \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad (4.5)$$

Paralelismo y perpendicularidad

Definición. Diremos que los planos π_1 y π_2 son paralelos y lo notaremos como $\pi_1 \parallel \pi_2$, cuando el ángulo α que forman sus vectores normales sea 0.

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = 0$$

Proposición. Dos planos son paralelos, si y solo si, los vectores normales a cada plano \vec{n} y \vec{n}' son proporcionales:

$$\alpha = 0 \iff \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Demostración. Análoga a la demostración de paralelismo entre rectas. Ver ecuación (4.2)

Definición. Diremos que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares y lo notaremos como $\pi_1 \perp \pi_2$, cuando el ángulo α que forman sus vectores normales sea $\frac{\pi}{2}$.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Proposición. Dos planos son perpendiculares, si y solo si, el producto escalar de los vectores normales es nulo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

Demostración. Análoga a la demostración de perpendicularidad entre rectas. Ver ecuación (4.3)

4.4 Ángulo formado por recta y plano

El ángulo formado por una recta y un plano en el espacio viene determinado por el que forma la propia recta con la proyección de la misma sobre el plano. En la figura 4.1, se observa que dicho ángulo es el complementario que forman el vector director de la recta y el vector normal al plano.

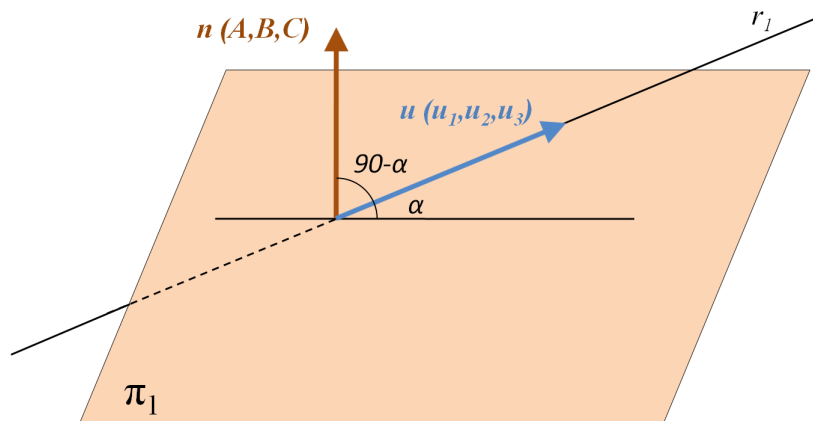


Figura 4.1: Ángulo formado entre una recta y un plano. (Elaboración propia)

Sea una recta r_1 definida con su vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y un plano definido con su ecuación general $\pi_1 : Ax + By + Cz + D = 0$, entonces el ángulo entre ellos viene dado por:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{|u_1 \cdot A + u_2 \cdot B + u_3 \cdot C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4.6)$$

con lo que el ángulo que forman una recta y un plano queda determinado si conocemos el vector director de la recta y el vector normal asociado al plano.

Paralelismo y perpendicularidad

Definición. Diremos que la recta y el plano r_1 y π_1 son paralelos y lo notaremos como $r_1 \parallel \pi_1$, cuando el ángulo α que forma el vector director de la recta y el normal al plano sea $\frac{\pi}{2}$.

$$r_1 \parallel \pi_1 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Proposición. Dada una recta y un plano r_1 y π_1 diremos que son paralelos, si y solo si, el producto escalar de sus vectores \vec{u} y \vec{n} es nulo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = u_1 \cdot A + u_2 \cdot B + u_3 \cdot C = 0$$

Demostración. Análoga a la demostración de perpendicularidad entre rectas. Ver ecuación (4.3)

Definición. Diremos que la recta y el plano r_1 y π_1 son perpendiculares y lo notaremos como $r_1 \perp \pi_1$, cuando el ángulo α que forma el vector director de la recta y el normal al plano sea nulo.

$$r_1 \perp \pi_1 \stackrel{Def}{\iff} \alpha = 0$$

Proposición. Dada una recta y un plano r_1 y π_1 , diremos que son perpendiculares, si y solo si, sus vectores \vec{u} y \vec{n} son proporcionales:

$$\alpha = 0 \iff \frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C} = 0$$

Demostración. Análoga a la demostración de paralelismo entre rectas. Ver ecuación (4.2)

4.5 Distancia entre dos puntos

Definición. Supongamos dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ pertenecientes al espacio afín Euclídeo \mathbb{R}^3 con el producto escalar definido. Diremos que la distancia entre ambos puntos vendrá determinada por el módulo del vector \overrightarrow{AB} que une ambos puntos.

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Si \vec{a} es el vector de posición del punto A y \vec{b} es el vector de posición de B , entonces

$$d(A, B) = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4.7)$$

Propiedades

La distancia entre dos puntos cumple las siguientes propiedades;

1. $d(A, B) = 0 \iff A = B \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^3$
2. $d(A, B) = d(B, A) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^3$
3. Desigualdad triangular: $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^3$

Y además la igualdad solo se cumple si los puntos A, B y C están alineados.

Demostración.

$$1. \quad d(A, B) = 0 \Rightarrow \|\vec{b} - \vec{a}\| = 0 \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{a} \Rightarrow A = B$$

$$A = B \Rightarrow d(A, B) = d(A, A) = \|\vec{a} - \vec{a}\| = \|\vec{0}\| = 0$$

$$2. \quad d(B, A) = \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\| = d(A, B)$$

3. Consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Swartz.

$$d(A, C) = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = d(A, B) + d(B, C)$$

Es facil ver que, la longitud de cada lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Además es interesante comentar geoméricamente el caso de la igualdad, ya

que el camino más corto para ir de un punto A , a un punto C es la línea recta entre ambos y por tanto A , B y C deben de estar alineados.

4.6 Distancia de un punto a un plano

Supongamos un plano $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto $P(x_1, x_2, x_3)$. La distancia entre el punto y el plano será la longitud del vector más corto que se puede conseguir uniendo cualquier punto del plano con el punto P . De esta forma, la distancia entre π_1 y P será la distancia entre P y su proyección P' sobre el plano π_1 . Esta proyección será el pie de la recta perpendicular al plano trazado por P .

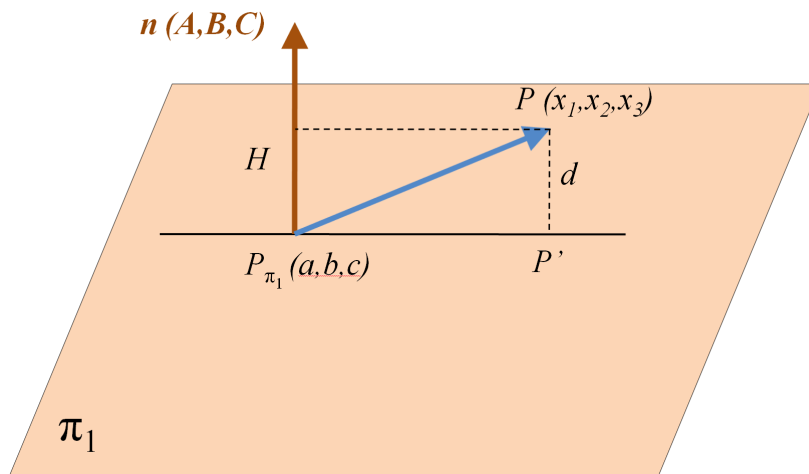


Figura 4.2: Distancia de un punto a un plano (Elaboración propia)

Sea \vec{n} el vector normal al plano π_1 y sea $P_{\pi_1}(a, b, c)$ un punto cualquiera perteneciente al plano π_1 . Según la figura 4.2 vemos que la distancia entre el punto P y el plano π_1 será PP' , que coincide con la proyección del vector $\overrightarrow{P_{\pi_1}P}$ sobre \vec{n} . Utilizando las propiedades del producto escalar, se tiene

$$\overrightarrow{P_{\pi_1}P} \cdot \vec{n} = \left\| \overrightarrow{P_{\pi_1}P} \right\| \cdot \left\| \vec{n} \right\| \cdot \cos \left(\angle \overrightarrow{P_{\pi_1}P}, \vec{n} \right)$$

Observando la figura 4.2 observamos que $\left\| \overrightarrow{P_{\pi_1}P} \right\| \cdot \cos \left(\angle \overrightarrow{P_{\pi_1}P}, \vec{n} \right) = P_{\pi_1}H$ coincide con la distancia d del punto al plano π_1 , entonces:

$$\begin{aligned} d(P, \pi_1) &= \frac{\left| \overrightarrow{P_{\pi_1}P} \cdot \vec{n} \right|}{\left\| \vec{n} \right\|} = \frac{|(x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c) \cdot (A, B, C)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que $P_{\pi_1} \in \pi_1$, entonces satisface las siguiente expresión $Aa + Bb + Cc + D = 0$, de tal forma que podemos escribir la anterior expresión como:

$$d(P, \pi_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4.8)$$

Notese que esta fórmula es bastante similar a la distancia entre un punto y una recta en el plano. Cabe destacar que, el valor absoluto indica que la distancia debe ser positiva. Otra forma de obtener la distancia de un punto a un plano sería hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por P y hallar la distancia entre P y el punto de intersección de esta recta con el plano.

Calculo de distancia entre planos paralelos usando distancia de punto a plano

El cálculo de la distancia de un punto a un plano nos será útil para calcular la distancia entre dos planos paralelos, es decir para planos cuyos vectores normales sean proporcionales. Es fácil ver que dos planos paralelos tendrán las siguientes expresiones $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D' = 0$, en la que solo difiere el término independiente. Para hallar la distancia entre ambos planos tan solo tendremos que calcular la distancia de un punto perteneciente a uno de los planos al otro plano:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4.9)$$

ya que al pertenecer $P(x_1, y_1, z_1)$ a π_1 se cumple que $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ y por tanto, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. En el caso de que los planos no fuesen paralelos la distancia sería cero ya que los planos se cortarían en una recta.

4.7 Distancia entre un punto y una recta.

Sea una recta dada por la ecuación vectorial $r_1 \equiv (x, y, z) = (a_1, b_1, c_1) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Si el punto pertenece a la recta, la distancia entre ambos será nula. En el caso de que no pertenezca a la recta, será la distancia del punto P_1 a la proyección ortogonal P' de P_1 sobre la recta r_1 .

La distancia entre r_1 y P_1 es el módulo del vector $\overrightarrow{P'P_1}$.

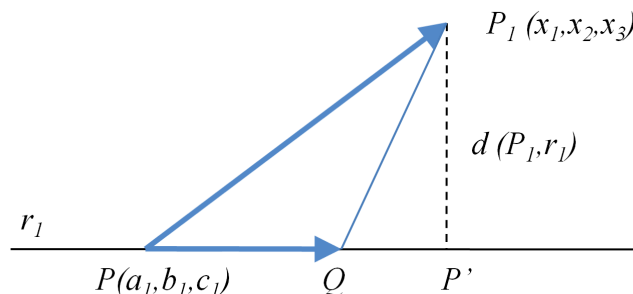


Figura 4.3: Distancia de un punto a una recta (Elaboración propia)

Tal y como vemos en la figura 4.3 se tiene

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P_1}$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad vectorialmente por el vector director de la recta \vec{u} se tiene

$$\overrightarrow{PP_1} \times \vec{u} = \overrightarrow{PP'} \times \vec{u} + \overrightarrow{P'P_1} \times \vec{u} = \overrightarrow{P'P_1} \times \vec{u}$$

al ser $\overrightarrow{PP'} \times \vec{u}$ vectores paralelos, por lo que su producto vectorial es nulo. Así aplicando la definición del módulo del producto vectorial de dos vectores a la relación anterior se tiene

$$\|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{u}\| = \|\overrightarrow{P'P_1} \times \vec{u}\| = \|\overrightarrow{P'P_1}\| \|\vec{u}\| \sin(\angle \overrightarrow{P'P_1}, \vec{u}) = \|\overrightarrow{P'P_1}\| \|\vec{u}\|$$

al ser $\frac{\pi}{2}$ el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{P'P_1}$ y \vec{u} . Así despejando de la ecuación anterior tenemos

$$d(P_1, r_1) = \|\overrightarrow{P'P_1}\| = \frac{\|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad (4.10)$$

y expresándolo de forma analítica podemos escribir:

$$d(P_1, r_1) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - b_1 & u_2 \\ z_1 - c_1 & u_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ z_1 - c_1 & u_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & u_1 \\ y_1 - b_1 & u_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \quad (4.11)$$

4.8 Distancia entre una recta y un plano.

Dada una recta r_1 y un plano π_1 , la distancia entre ellos será cero si la recta y el plano se cortan o si la recta se encuentra contenida en el plano. En el caso de que la recta sea paralela al plano, la distancia entre ambos puede ser hallada eligiendo un punto cualquiera de la recta y calculando la distancia de ese punto al plano, utilizando la expresión (4.8).

4.9 Distancia entre dos rectas

La posición relativa entre dos rectas r_1 y r_2 determinará la forma de estudiar la distancia entre ambas. A continuación se detalla la forma de calcular la distancia para cada una de las posiciones relativas posibles

- Rectas coincidentes: Si las rectas son coincidentes, entonces la distancia entre ellas será nula, ya todo punto perteneciente a una recta también lo es a la otra, por tanto ambas poseen infinitos puntos en común
- Rectas paralelas: Si las rectas son paralelas, es decir, tienen vectores directores proporcionales pero no son coincidentes, entonces no compartirán ningún punto en común. Para obtener la distancia entre ambas bastaría con elegir un punto de una de las rectas y usar la expresión (4.11) para obtener la distancia entre un punto y una recta.
- Rectas secantes: En el caso de que las rectas sean secantes, ambas rectas intersecan en un

único punto, con lo cual la distancia entre ellas es cero, por tener un punto en común

- Rectas que se cruzan: En el caso de que las rectas r_1 y r_2 se crucen, entonces la distancia entre ellas será la menor de las distancias que hay entre dos puntos, uno de la primera y otro de la segunda. Sean dos rectas que expresamos con su ecuación vectorial $r_1 \equiv (x, y, z) = (a_1, b_1, c_1) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (a_2, b_2, c_2) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$. Además trazamos un recta r'_2 paralela a r_2 que pase por el punto (a_1, b_1, c_1) perteneciente a r_1 . Definiremos el plano π como el que generan las rectas r_1 y r'_2 , así que será paralelo a r_2 . De esta forma, podemos hallar la distancia entre r_1 y r_2 utilizando la distancia de un punto Q de r_2 al plano π . Ver figura 4.4.

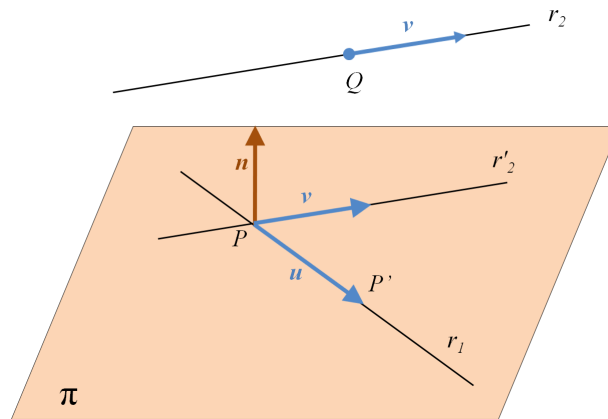


Figura 4.4: Distancia de rectas que se cruzan (Elaboración propia)

Para ello, se utiliza la fórmula (4.8) que define la distancia de un punto a un plano:

$$d(Q, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{n}_\pi\|} \quad (4.12)$$

donde Q es un punto de r_2 , P un punto del plano π y \vec{n}_π el vector normal al plano. Tomando \vec{n}_π como el producto vectorial de los vectores directores de la recta tendremos:

$$d(Q, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{n}_\pi\|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{n}_\pi\|}$$

y si vemos $\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ no es más que el producto mixto de estos tres vectores, que lo expresaremos como $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$

$$d(Q, \pi) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{n}_\pi\|}$$

Si desarrollamos, tendríamos

$$d(Q, \pi) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & a_2 - a_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 - b_1 \\ u_3 & v_3 & c_2 - c_1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2}} \quad (4.13)$$

Esta expresión representa la altura del paralelepípedo formado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{PQ} . ya que el numerador representa el volumen de dicho paralelepípedo y el denominador el área de la base.

4.10 Cálculo de áreas

Sea un triángulo de vértices ABC de forma que los vectores \vec{AB} y \vec{AC} son los vectores que unen A y B, y A y C respectivamente. Ambos vectores son linealmente independientes (por definición de triángulo).

Si hacemos el producto vectorial de estos vectores obtendremos otro vector de módulo:

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \text{sen}(\angle \vec{AB}, \vec{AC})$$

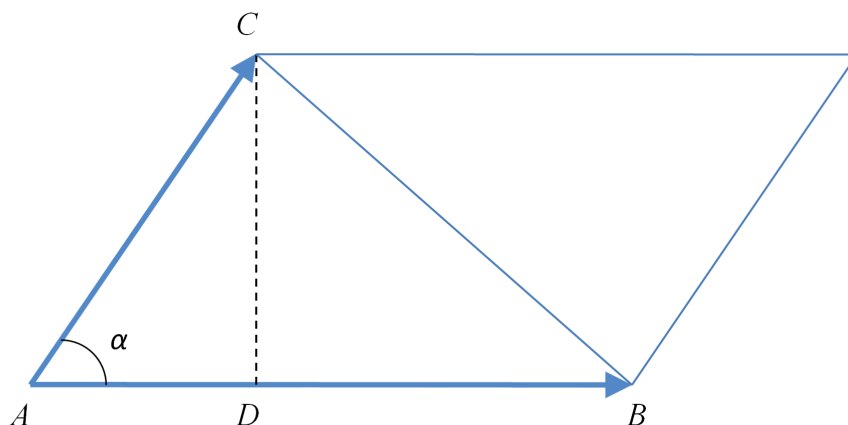


Figura 4.5: Paralelogramo formado por los vectores \vec{AB} y \vec{AC} (Elaboración propia)

Si observamos la figura 4.5 vemos que $\|\vec{AC}\| \text{sen}(\angle \vec{AB}, \vec{AC})$ representa la altura del paralelogramo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} . Por tanto, el Área \widehat{ABC} ² será:

$$\text{Área } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

Si definimos los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ podremos calcular los vectores \vec{AB} y \vec{AC} con las siguientes expresiones $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$. Si desarrollamos analíticamente, el área del triángulo ABC:

² \widehat{ABC} denota el triángulo formado por los vértices A, B y C.

$$\begin{aligned} \text{Área } \widehat{ABC} &= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

De tal forma que el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{AB} y \vec{AC} será el doble de la expresión anterior.

4.11 Cálculo de volúmenes

Consideremos un paralelepípedo formado por las aristas \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} . Tomando el producto mixto de estos tres vectores se tiene:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Si analizamos esta expresión vemos que $(\vec{v} \times \vec{w})$ representa un vector perpendicular al plano formado por ambos vectores. Como hemos visto en el apartado anterior, su módulo definirá el área del paralelogramo que forman dichos vectores, es decir, el área de la base del paralelepípedo.

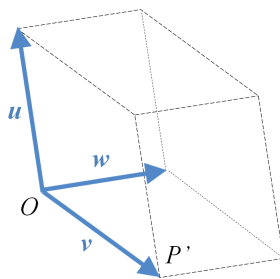


Figura 4.6: Paralelepípedo definido por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} . (Elaboración propia)

Si calculamos el producto escalar de \vec{u} y $(\vec{v} \times \vec{w})$ tendremos:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cos \alpha$$

Dónde $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ es el área del paralelogramo definido por los vectores \vec{v} y \vec{w} y $\|\vec{u}\| \cos \alpha$ representa la proyección del módulo del vector \vec{u} sobre la base perpendicular al plano formado por los vectores \vec{v} y \vec{w} , que coincide con el valor de la altura del paralelepípedo. Así

$$\text{Volumen} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Además sabemos que el volumen del tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo formado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

5 Fundamentación didáctica: investigaciones sobre enseñanza y/o aprendizaje

La investigación que se desarrolla a continuación se ubica dentro del marco de la didáctica de la geometría espacial, de las dificultades de aprendizaje de esta rama así como las soluciones metodológicas que se han propuesto en esta unidad didáctica.

En particular, nos preocuparán las dificultades de aprendizaje relacionadas con la Geometría en el espacio que presentan los alumnos en la asignatura de Matemáticas II perteneciente al último curso de Bachillerato. Es conocido que Bachillerato representa un puente que ayuda a incorporar al alumnado a la vida activa y en la mayoría de los casos, a comenzar una carrera universitaria. Referente a ello, el estudio de Pérez y Guillén (2008) presenta los resultados de una encuesta a profesores de Secundaria de la comunidad valenciana en el que se manifiesta la dificultad en la enseñanza de esta área de las Matemáticas debido a la escasez de conocimientos previos que los alumnos tienen al alcanzar estos cursos superiores.

Es por esto que la metodología didáctica usada en el desarrollo de la unidad de Geometría va a resultar esencial para un correcto aprendizaje del alumnado. Se han desarrollado estudios relacionados en este sentido por autores como Luengo y Sánchez Pesquero (1990) en los que se remarca la importancia de que el docente plantee actividades y situaciones con el objetivo de generar diferentes instrumentos de consulta que estimule al alumnado el razonamiento, la reflexión y la profundización, con el objetivo de que logren aprendizajes significativos, relacionarlos con otras áreas y aplicarlos en su vida diaria.

Además, según Abrate y Pochulu (2006) «*Los aprendizajes de Geometría se han basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas*», de forma que la resolución de forma mecánica y la memorización están influenciando negativamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje y se buscarán propuestas didácticas que estimulen la experimentación, el razonamiento y la argumentación.

Aquí reside la importancia de utilizar un método adecuado para un correcto proceso de enseñanza-aprendizaje. Es así que, la apuesta metodológica que desarrolla este trabajo reside, por un lado, en la aplicación de la metodología enseñanza y aprendizaje basado en proyecto, y por otro lado, en la importancia del uso de las TIC y en particular, el uso de Geogebra, que facilitará enormemente la realización de dichas tareas que favorezcan la reflexión y el razonamiento geométrico.

A continuación, se desarrollará la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos, en la que justificaremos por qué vamos a usarla en el desarrollo de este trabajo, después la definiremos según la literatura científica y por último, hablaremos de la integración de Geogebra a esta metodología.

5.1 Metodología enseñanza y aprendizaje basado en proyectos

5.1.1 Justificación de ABP

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) consiste en plantear a los alumnos un proyecto que sea percibido por ellos como ambicioso pero viable y que deben llevar a cabo en pequeños equipos. (Sabaté, 2012). Esta metodología ha ido abriéndose paso en el sistema educativo actual hasta llegar a ser una de las más relevantes y usadas en el entorno escolar. Además, supone un paso hacia delante para aquellos docentes que entienden la educación como una herramienta para la construcción del conocimiento que está directamente relacionada y en constante interacción con la realidad que nos rodea. El aprendizaje depende a día de hoy, cada vez menos de lo que ocurre en el aula y más de la correlación entre lo que sucede en ésta y lo que acontece en el entorno (Flecha, 2009). Bajo este panorama, metodologías como la lección magistral o el uso del libro de texto como herramienta principal para la docencia, cada vez se están quedando más obsoletos y deben ser considerados como apoyos docentes que puedan aplicarse de forma circunstancial en el ámbito académico. El proceso de enseñanza-aprendizaje se encuentra actualmente evolucionando constantemente en el que se prioriza el uso de metodologías activas, como pueden ser el aprendizaje cooperativo, basado en la investigación o basado en proyectos.

El Aprendizaje Basado en Proyectos según Galeana (2006) contribuye de manera primaria a:

1. Crear un concepto integrador de las diversas áreas del conocimiento.
2. Promover una conciencia de respeto de otras culturas, lenguas y personas.
3. Desarrollar empatía por personas.
4. Desarrollar relaciones de trabajo con personas de diversa índole.
5. Promover el trabajo disciplinar.
6. Promover la capacidad de investigación.
7. Proveer de una herramienta y una metodología para aprender cosas nuevas de manera eficaz.

A continuación se citan las justificaciones que dan otros autores al uso del Aprendizaje Basado en Proyectos:

- Permite introducir en el proceso con relativa facilidad el desarrollo de habilidades transversales tales como el trabajo en grupo, el aprendizaje cooperativo o la comunicación eficaz (Sabaté, 2012)
- Incentivar la participación directa de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, incrementando no solo sus conocimientos; sino también sus habilidades, lo que será de utilidad en su futuro profesional. (Jiménez y Ramírez 2013)
- Pretende que los estudiantes asuman una mayor responsabilidad de su propio aprendizaje, así como aplicar en problemas reales, las habilidades y conocimientos adquiridos en su formación. Su intención es encaminarlos a situaciones que los lleven a rescatar, comprender y aplicar lo que aprenden como una herramienta para resolver problemas y realizar tareas. (Flores y Juárez 2017)

5.1.2 Metodología ABP

Existe una alta importancia en el estudio de literatura científica relacionada con ABP, ya que nos resuelve muchas dudas sobre que la diferencian de otras metodologías activas o otros términos como «aprendizaje basado en retos» o «aprendizaje basado en problemas». En este apartado definiremos en qué consiste ABP según los autores que han estudiado sobre esta metodología y cuáles son los roles que toman el profesor y el alumno respectivamente cuando se pone en uso. Además, se expondrán las dificultades que se encuentran al implantar esta metodología en el aula.

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es un modelo de aprendizaje que consiste en la realización de un proyecto final con un plan establecido. Surge del constructivismo y ha ido evolucionado a partir de las investigaciones de autores como Lev Vygotsky, Dewey, Ginsburg, Oppen o Dole. El objetivo del alumnado será la resolución de un problema complejo, para ello, las actividades que realicen estarán orientadas con objetivo de la resolución del mismo. Este modelo de aprendizaje apuesta por un trabajo grupal en el que los estudiantes deben hacer uso de los recursos que les ofrezca el docente para resolver de forma autónoma y cooperativa el problema final.

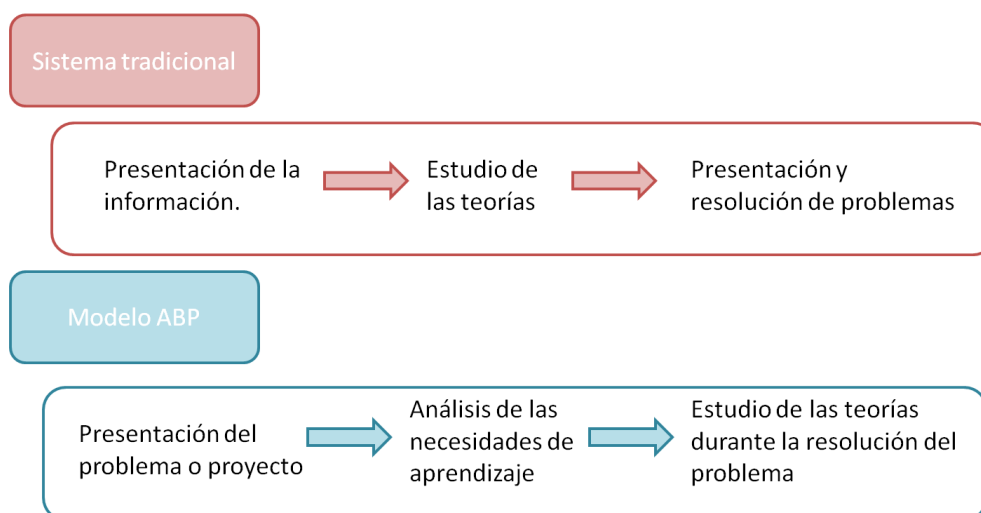


Figura 5.1: Comparativa esquemática entre el sistema tradicional y el modelo ABP (Elaboración propia)

En la figura 5.1 se muestra la comparativa entre un sistema de enseñanza-aprendizaje tradicional con la metodología ABP. En el sistema tradicional, se asume que los estudiantes deben dominar el contenido antes de aplicar lo aprendido para resolver un problema. En cambio en la metodología ABP el problema o proyecto se plantea al principio y el aprendizaje vendrá ligado al fruto del análisis y trabajo realizado sobre el problema.

Para comprender esta metodología, analizaremos cuáles deben de ser los roles que han de tomar tanto el docente como el alumno cuando se inicie ABP en el aula:

Durante el transcurso de este modelo *el docente* toma una función diferente en el proceso de aprendizaje ya que su papel será aportar a los alumnos recursos y orientación, a medida que pro-

gresen en sus exploraciones e indagaciones. De tal forma que la fuente de información no vendrá del propio profesor, sino que los propios alumnos son los que aprenden de forma autónoma para mejorar sus conocimientos. Así mismo, Flores y Juárez (2017) demostraron que el docente no solamente es un guía que está a disposición del estudiante para orientarlo, sino que juega un papel fundamental como motivador y creador de escenarios de aprendizaje.

Según la recopilación de Sanchez (2013) sobre el rol de los docentes en ABP se hace hincapié en que *«no es una metodología adecuada para aquellos profesores a los que les gusta ser siempre el centro de atención, ya que actúa como mediador o guía.»*

En la otra cara, el rol del alumno. En este caso Sanchez (2013) recalca que *«Los estudiantes que perciben una mayor autonomía tienden a tener experiencias más positivas en el ABP además, presentan mayor motivación, tienen una mejor relación con el profesor y abordan temas transversales a otras asignaturas.»*

Según la literatura científica relacionada con ABP, lo realmente desafiante de esta metodología consiste en la aplicación inicial en la clase. Cada metodología tiene sus ventajas y sus complicaciones a la hora de ponerlas en práctica. A continuación, se recogen las dos dificultades más significativas que se han encontrado en el uso de ABP:

- En primer lugar, en el estudio de Van den Berg (2006) se cita la elevada carga de trabajo que los docentes han reportado con el uso de esta metodología. Además, la evaluación de los conocimientos se hace más compleja, ya que la elección de un procedimiento evaluativo en el que se cumplan las expectativas de evaluación del docente y del alumnado aún no está muy clara. Esto se debe a las contradicciones cruciales en las opiniones sobre la evaluación en la educación basada en proyectos. Por otro lado, también relacionado con la dificultad que encontraban los profesores al aplicar esta metodología, en el estudio de Sanchez (2013) se citaba que *« los profesores que aplican ABP encuentran dificultades en los siguientes aspectos: tiempo, manejo de la clase, control, apoyo al aprendizaje de los alumnos, uso de la tecnología y evaluación. En cuanto al tiempo, se exponía que los proyectos suelen tomar más tiempo de lo que habitualmente se programa. El manejo de la clase es uno de los problemas más comunes en el ABP, ya que los profesores tienen que encontrar el equilibrio entre permitir a los alumnos trabajar por su cuenta y mantener cierto orden.»*
- Por otro lado, según el estudio realizado por Krajcik (1998) se revela que existe una cierta debilidad o dificultad para los alumnos que utilizaban la metodología ABP; muchos de ellos se obstaculizaban y cometían fallos a la hora de centrarse en el mérito científico de las preguntas generadas y de recoger y analizar sistemáticamente los datos, así como manejar el tiempo y sacar conclusiones usando argumentos lógicos.

Como vemos por un lado, hay una implicación por parte del profesor más alta que en el resto de metodologías tradicionales, ya que tiene que sobrepasar ciertas dificultades tanto de organización y evaluación de tareas, como de gestión del tiempo y control del aprendizaje de los alumnos.

A pesar de estas dificultades, como hemos indicado en el apartado anterior, los estudios indican que el uso de ABP es una de las más relevantes en la actualidad y que ayuda a la adquisición de habilidades y destrezas tales como la autonomía, el trabajo en equipo, el aprendizaje cooperativo, la búsqueda y análisis de información o la capacidad de comunicación de forma eficaz. Según el estudio realizado por Kokotsaki (2016), las siguientes seis recomendaciones clave se consideran esenciales para la adopción con éxito de un enfoque de ABP:

1. *Apoyo a los estudiantes: Los estudiantes deben ser guiados y apoyados eficazmente; se debe hacer hincapié en la gestión eficaz del tiempo y la autogestión de los estudiantes, incluido el uso seguro y productivo de los recursos tecnológicos.*
2. *Apoyo a los profesores: Es necesario ofrecer un apoyo regular a los profesores mediante la*

creación de redes y oportunidades de desarrollo profesional. El apoyo de la dirección de la escuela es crucial.

3. *Trabajo en grupo: El trabajo en grupo de alta calidad ayudará a garantizar que los estudiantes compartan niveles iguales de participación.*
4. *El equilibrio entre la enseñanza didáctica y el trabajo independiente con el método de indagación garantizará que los estudiantes desarrollen un cierto nivel de conocimientos y habilidades antes de dedicarse cómodamente al trabajo independiente.*
5. *La evaluación hace hincapié en la reflexión, la autoevaluación y la evaluación entre pares. Las pruebas de progreso deben ser monitoreadas y registradas regularmente.*
6. *Un elemento de elección y autonomía del estudiante a lo largo del proceso de PBL ayudará a los estudiantes a desarrollar un sentido de propiedad y control sobre su aprendizaje.*

A continuación, en el siguiente apartado se hará una recopilación de diferentes estudios que se han llevado a cabo relacionados con la aplicación de ABP en el área matemática que estamos trabajando en este trabajo; la Geometría.

5.1.3 Aplicación de ABP a la Geometría

En este apartado, se realiza una recopilación de artículos e investigaciones en los que se ha aplicado la metodología de ABP con objeto de demostrar su eficiencia y efectividad. Nos centraremos en aquellos que tienen más similitud con nuestro tema.

Comenzaremos con la investigación de Barron (1998), en el que se estudia cual ha sido la experiencia de un grupo de alumnos que han utilizado esta metodología aplicada a la resolución de problemas arquitectónicos utilizando el uso de la Geometría. En el estudio, se hacen mediciones de las capacidades de los alumnos antes de la utilización de la metodología y posteriormente, se miden las mismas una vez que se ha empleado el ABP. Las conclusiones revelan un incremento de la comprensión de los diferentes conceptos geométricos, mejorando el cálculo de perímetros, de áreas y de volúmenes.

Por su parte, Maure y Marimón (2015) realizó un trabajo en el que sus estudiantes tratan de resolver problemas en clase directamente relacionados con problemas reales. Los resultados del estudio hacen ver que el ABP afecta positivamente en el resultado académico de sus alumnos; el proceso de resolución de problemas, así como la metacognición mejoró con respecto a el año anterior (en el que no se usó ABP). Remarcan que el uso de esta estrategia didáctica en el ámbito de las matemáticas, mejora su actitud y motivación hacia la materia. A modo de conclusión, Maure y Marimón (2015) señala:

«El aprendizaje con proyecto desarrolla experiencias que permiten a los estudiantes usar y emplear la matemática de manera significativa. Sin embargo, persiste la falta de pensamiento crítico porque ellos no asumen el rol de un individuo que cuestione las actividades que realice su profesor o guía.»

Como vemos es importante el rol que asumen los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje así que, es necesario incentivar que de algún modo al alumno, para que se interese de forma personal por el problema que se está tratando de resolver o investigar.

Por otro lado, Boaler (1998, 2002) realizó una investigación de tres años de duración en el que se analizaban dos escuelas con enfoques alternativos de enseñanza de las matemáticas. Una de las escuelas utilizaba un enfoque tradicional, basado en libros de texto; la otra utilizaba actividades abiertas en todo momento. Para el estudio, se usaron varias herramientas de toma de datos,

incluyendo observaciones, cuestionarios, entrevistas y evaluaciones cuantitativas. Los alumnos que siguieron un enfoque tradicional desarrollaron un conocimiento procedimental que les resultó de escasa utilidad en situaciones desconocidas. Los alumnos que aprendieron matemáticas en un entorno abierto, basado en proyectos, desarrollaron un conocimiento conceptual que les proporcionó ventajas en una serie de evaluaciones y situaciones. Los alumnos que usaron ABP desarrollaron un sistema de pensamiento y uso de las matemáticas que les ayudaba tanto en el ámbito escolar como en el no escolar. Además sorprendentemente, ABP también mejora la capacidad de memorización de conceptos matemáticos a pesar de que suele estar más ligada a un enfoque tradicional en el que se suelen mecanizar y memorizar procedimientos.

Para finalizar, Flores-Compañ, Bellés Agut, Nebot Romero y Tintoré (2019) trata de incluir la metodología ABP en proyectos aplicados a la geometría para evitar que los alumnos tengan un papel pasivo y se impliquen activamente en la construcción de un determinado saber geométrico. Proponen fusionar el ABP con las nuevas tecnologías para conseguir promover el espíritu emprendedor y el pensamiento crítico, así como incentivar la participación del alumnado, la enseñanza entre iguales y el fomentar el trabajo cooperativo.

La fusión de ABP con nuevas tecnologías ha demostrado aportar positivamente en el rendimiento escolar. Esta introducción de herramientas TIC otorga a los estudiantes la capacidad de desarrollar de una mejor forma su investigación en el ABP; es por esta razón por la que, en la programación de este trabajo, se utilizará Geogebra, como herramienta para facilitar a los estudiantes el desarrollo de sus investigaciones.

5.2 Geogebra, una herramienta para la visualización y razonamiento geométrico.

La importancia de herramientas tecnológicas favorece notablemente en el desarrollo del aprendizaje en Matemáticas según Godino (2003) que propone un uso adecuado y amplio de los recursos tecnológicos con el objeto de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, se cita la necesidad de tener presente no cometer el error de usarlas como un reemplazo de la intuición y la comprensión conceptual.

Como recurso tecnológico a usar en esta programación, se ha decidido el software de Geogebra, que nos da una respuesta directa a los problemas que se nos están planteando relacionados con la correcta comprensión de los conceptos geométricos en el espacio tridimensional así como su visualización.

Geogebra, según la fuente oficial, es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadísticas y cálculo en un solo motor. Además, ofrece una plataforma en línea con recursos docentes gratuitos para el aula creados por la comunidad. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de nuestra plataforma de colaboración GeoGebra Classroom donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real. Algunas de las características más importantes son las siguientes:

- Geogebra conecta geometría, álgebra y datos numéricos de forma completamente dinámica
- Posee una interfaz muy fácil de usar e intuitiva para los alumnos además de contar con poderosas herramientas
- Herramienta de autoría para crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web
- Software de código abierto disponible gratuitamente para usos no comerciales

Además Geogebra une el tratamiento algebraico, en el que se definen las ecuaciones algebraicas y se puede operar con ellas; con la visualización geométrica, en la que se representa los elementos u objetos geométricos asociados a la representación algebraica. Es esta unión lo que aumenta la versatilidad del programa y donde podemos encontrar su mayor potencial. En la versión actual, Geogebra 6.0, se incluye soporte para representación tridimensional, que será realmente útil en el desarrollo de este trabajo.

Pero, ¿realmente Geogebra supone una mejora en el proceso de enseñanza en clase? La respuesta a esta pregunta se manifiesta claramente en estudios como en Avecilla (2015), en el que se mide y compara la evolución del rendimiento académico entre dos grupos de 34 estudiantes cada uno, en los cuales en uno de ellos se incluye Geogebra como herramienta de apoyo en el aula, mientras que en el otro no; ofreciendo unos resultados superiores en el grupo en el que sí es usado.

Por otro lado, al ser un software relativamente reciente, la introducción de este software en el aula aún no ha llegado a todos los docentes. En este sentido, Bello (2020) realizó una investigación en la que se analiza el grado de satisfacción, tanto de los docentes, como del alumnado, al introducir Geogebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Para una correcta implementación de Geogebra en el aula, se sugiere tener en cuenta los siguientes aspectos en el uso de esta herramienta en clase:

«Focalizar las instrucciones de GeoGebra que se usarán en clases; que el docente medie los principales conceptos, propiedades y resultados de la Geometría; hacer una estructuración adecuada de las tareas para la utilización del software; y por último, la organización en un tiempo pertinente del trabajo en las clases.»

Las conclusiones del trabajo afirmaron que el uso adecuado de Geogebra, abre una amplia ven-

5 Fundamentación didáctica: investigaciones sobre enseñanza y/o aprendizaje

tana de posibilidades que permiten al docente abarcar una mayor profundidad en el estudio de la Geometría. Sin embargo, se hace referencia a que el uso de este software no es un recurso infalible que dé respuesta a los todos los problemas de aprendizaje y por tanto, no debe ser el eje central en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que se debe usar como una herramienta más que usar en clase.

En la programación de la unidad desarrollada en este trabajo, se han tenido en cuenta estas recomendaciones y se utilizará Geogebra como herramienta de apoyo en las clases, que permitirá al alumno investigar los diferentes conceptos matemáticos así como hacer comprobaciones visuales de los resultados a los que ha conseguido llegar en las diferentes actividades que se plantean.

6 Proyección didáctica

La unidad didáctica que se presenta a continuación es un instrumento de planificación específico, incluyendo el desarrollo y evaluación de los contenidos del Bloque 4 de Geometría de la materia Matemáticas II para el 2º curso de Bachillerato.

6.1 Título

El título elegido para esta unidad didáctica ha sido «Geometría en el espacio: Propiedades métricas». Este título hace referencia directamente a los contenidos que se van a desarrollar en este trabajo.

6.2 Justificación

Las Matemáticas constituyen una forma de mirar e interpretar el mundo que nos rodea, reflejan la capacidad creativa, expresan con precisión conceptos y argumentos, favorecen la capacidad para aprender a aprender y contienen elementos de gran belleza; sin olvidar además el carácter instrumental que las matemáticas tienen como base fundamental para la adquisición de nuevos conocimientos en otras disciplinas, especialmente en el proceso científico y tecnológico y como elemento conductor en el desarrollo de la cultura y la civilización .

En el desarrollo de esta unidad, nos centraremos en las propiedades métricas, que constituyen una parte esencial dentro del bloque de Geometría. Dichos conocimientos matemáticos son útiles para el desarrollo de la vida cotidiana a la hora de resolver cálculos relacionados con distancias, áreas o volúmenes, además de aportar la capacidad de valorar la cultura arquitectónica o incluso resolver problemas que puedan surgir en el día a día relacionados con la visión espacial.

Desde el punto de vista de la prueba de acceso a la universidad, las propiedades métricas suponen una parte importante de los contenidos, ya que dicha unidad es un «broche» a los diferentes conceptos aprendidos en todo el bloque de Geometría, siendo así, una herramienta muy útil para resolver e interpretar los diferentes problemas que se plantean en dicha prueba. Además, suponen una base importante de conceptos matemáticos para carreras como Física o algunas Ingenierías, por lo que es esencial que se afiancen correctamente, sobre todo para aquellos alumnos cuya finalidad es realizar alguna de estas carreras.

Se trata por lo tanto de una unidad crucial en la asignatura de Matemáticas, en la que el objetivo principal es que el alumno comprenda su sentido y la importancia de su estudio, así como sus aplicaciones prácticas.

6.3 Contextualización del centro y del aula

La unidad didáctica se contextualizará en el Instituto de Educación Secundaria Acebuche, centro donde realicé las prácticas docentes del Máster.

6 Proyección didáctica



Figura 6.1: Fachada IES Acebuche. (Fuente: AcebucheDigital)

6.3.1 Ubicación geográfica del centro

El I.E.S Acebuche se encuentra localizado en Torredonjimeno (Jaén), con dirección C. Antonio Machado, 4, 23650 (Ver Figura 6.2).

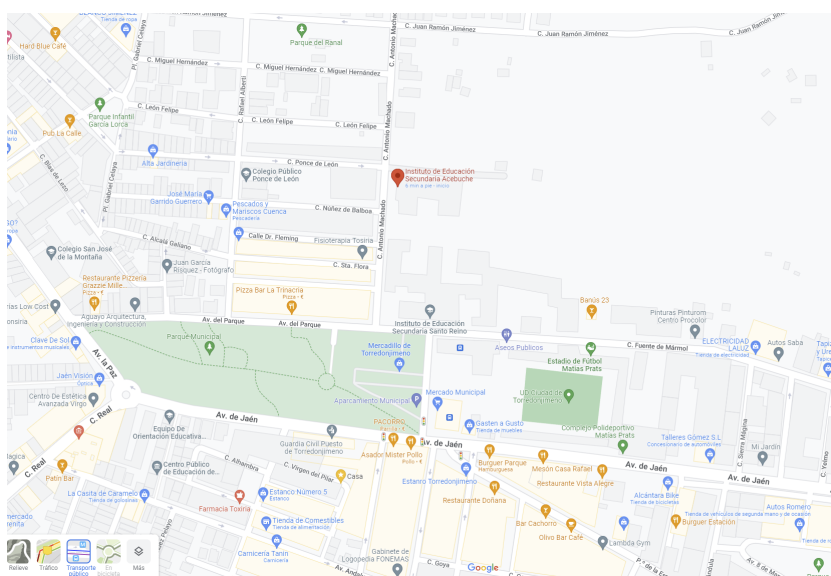


Figura 6.2: Ubicación IES Acebuche. (Fuente: GoogleMaps)

Torredonjimeno es un municipio español situado al suroeste de la provincia de Jaén, a unos 17 kilómetros de la capital provincial y tradicionalmente encuadrado en la comarca de la Campiña de Jaén, aunque actualmente pertenece a la Comarca Metropolitana de Jaén.

6.3.2 Aspectos demográficos y socio-económicos de la localidad

Actualmente, la ciudad de Torredonjimeno basa su economía en la agricultura y la producción de aceite. En este aspecto, Torredonjimeno tiene dedicada una superficie efectiva al olivar de más de catorce mil hectáreas, mientras que, se dedican unas ciento cincuenta hectáreas a la producción de trigo. Observando estas cifras, es fácil ver que el principal cultivo de la ciudad es el olivar, disponiendo incluso de diversas denominaciones de origen de aceite de oliva. Como actividades profesionales principales, destacan el comercio, la venta de artículos de uso diario y doméstico y la construcción. La hostelería y la alimentación también forman parte de la economía de la ciudad.

Conforme a los datos registrados en el último año, una gran parte de la población dedica su tiempo a la agricultura, incluso sumada adicionalmente a su principal dedicación profesional, dado los avances en el sector de la mecanización. La propiedad de las fincas supone el régimen de explotación predominante y, de forma secundaria, el arriendo. Todos estos datos, según el último censo suponen un aumento de la industrialización en Torredonjimeno, dedicándose a ello un 38.7% de la población activa. En cuanto al sector servicios, un 47.6% del volumen total de la población. Destacan, en este sentido, las empresas de la construcción, industrias alimenticias (fábricas de aceite de oliva), la industria del mueble y la carpintería metálica..., configuradas en un buen número de pequeñas y medianas empresas y en un extenso campo de cooperativa.

Cuadro 6.1: Datos de interés - Localidad de Torredonjimeno. (Elaboración propia. Fuente: INE)

Otros datos de interés	
Extensión superficial	157,68 <i>km</i> ²
Altitud sobre el nivel del mar	586 <i>m</i>
Número de núcleos que componen el municipio	1
Población actual	14.116 <i>habitantes</i>
Centros de Educación Infantil y Primaria	6
Centros de Educación Secundaria	2
Centros de Educación de Adultos	1
Centros de Educación privados	1

Según los datos publicados por el INE procedentes del padrón municipal del año 2021, el 63.46% (8.595) de los habitantes empadronados en el Municipio de Torredonjimeno han nacido en dicho municipio, el 33.98% han emigrado a Torredonjimeno desde diferentes lugares de España, el 27.21% (3.685) desde otros municipios de la provincia de Jaén, el 3.10% (420) desde otras provincias de la comunidad de Andalucía, el 3.67% (497) desde otras comunidades autónomas y el 2.57% (348) han emigrado a Torredonjimeno desde otros países.

6 Proyección didáctica

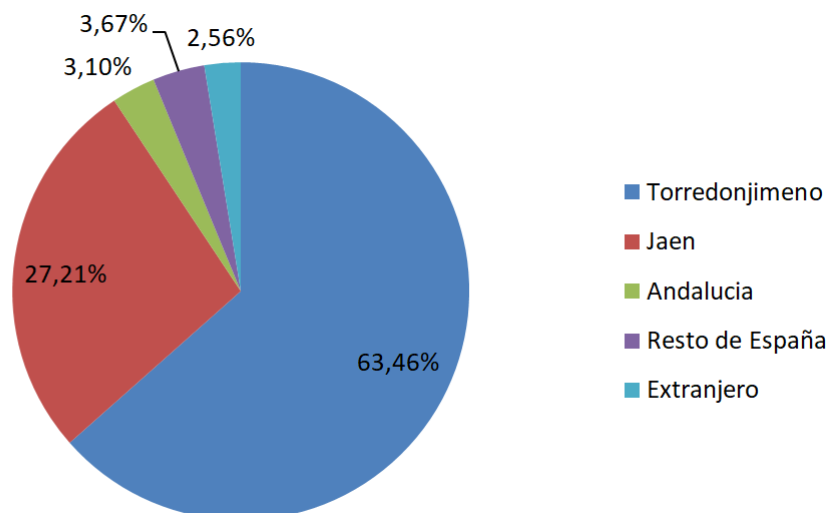


Figura 6.3: Torredonjimeno - Habitantes según lugar de nacimiento - 2021. (Elaboración Propia. Fuente INE)

6.3.3 Datos del centro

El IES Acebuche acoge actualmente a unos cuatrocientos alumnos anualmente y está compuesto por un claustro de entre cuarenta y cincuenta profesores, según el año. Según la página web del centro, la oferta educativa recoge las siguientes enseñanzas:

1. ESO: Educación Secundaria Obligatoria
2. Dos modalidades de Bachillerato
 - a) Modalidad científica.
 - b) Modalidad de humanidades y de Ciencias Sociales
3. Formación Profesional (Ciclos formativos)
 - a) Ciclo Formativo de Grado Básico: Servicios Administrativos.
 - b) Ciclo Formativo de Grado Medio: Gestión Administrativa.
 - c) Ciclo Formativo de Grado Superior: Educación Infantil.

6.3.4 Características del alumnado

La procedencia principal de los alumnos pertenecientes al primer ciclo de la ESO reside mayoritariamente en los colegios públicos de Torredonjimeno que se encuentran adscritos al instituto. Sin embargo, en los últimos años se ha dado un crecimiento de alumnos procedentes de centros no adscritos de Torredonjimeno e incluso de las localidades vecinas. En el último ciclo de la ESO y en Bachillerato, la mayoría de los alumnos provienen de promoción del mismo centro, aunque también de las localidades colindantes ya mencionadas.

En cuanto a la formación profesional, en el que se incluyen los ciclos de Grado Medio y Grado superior de Gestión Administrativa y Educación infantil, existe una amplia afluencia de alumnos de la provincia de Jaén, incluso de otras provincias colindantes. Durante la campaña de recolección de aceituna, muchas familias emigran a la localidad de forma temporal y aumenta el número de alumnos de otras nacionalidades. El desconocimiento del idioma para alumnos procedentes de

otras nacionalidades no ha supuesto mayores problemas ya que el centro dispone de atención individualizada para suplir esta diversidad del alumnado. Este alumnado está distribuido en la totalidad de cursos impartidos en el centro, principalmente en los cuatro cursos de ESO. Por otro lado, existe un colectivo destacable formado por alumnos de integración y de necesidades educativas especiales. Este colectivo es atendido desde la coordinación proporcionada por el Departamento de Orientación. Además su integración en el centro es real y continuada, ya que forman parte de la totalidad de las actividades programadas, desarrollando para ello los programas necesarios y el desarrollo de las A.C.I elaboradas.

La atención a la diversidad es ampliada con los alumnos que necesitan apoyo pedagógico, repartidos por toda la ESO y distribuidos de una forma heterogénea por los distintos grupos y con una organización horaria que permite aprovechar los recursos materiales y humanos de una manera eficiente. Dadas las características del alumnado y el interés de las familias, en el Centro se programan y desarrollan un importante número de actividades complementarias, extraescolares y culturales que completan su educación y formación.

6.4 Objetivos

Los objetivos a cumplimentar en esta unidad didáctica serán desarrollados en varios niveles; de más general a más específico. La unidad se encuadra dentro de los objetivos generales de etapa, posteriormente los objetivos específicos del área y por último, los objetivos didácticos de la unidad elegida.

6.4.1 Objetivos generales de la etapa (Bachillerato)

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, recoge en el artículo 24:

«El Bachillerato tiene como finalidad proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia. Asimismo, capacitará al alumnado para acceder a la educación superior.»

Es decir, los objetivos que se pretenden conseguir al finalizar Bachillerato, no son más que preparar a los alumnos para sus posteriores etapas, tanto si deciden continuar sus estudios en la universidad o adentrarse al mundo laboral. En el cuadro 6.2 se incluyen los diferentes objetivos a alcanzar al finalizar la etapa de Bachillerato.

Cuadro 6.2: Objetivos generales en el currículo de Bachillerato (Elaboración propia)

Objetivos de Bachillerato
a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Así mismo, se incluye los objetivos generales añadidos por el artículo 3.2 del Decreto 110/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Cuadro 6.3: Objetivos generales en el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía (Elaboración Propia)

Objetivos generales en el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía
a) Profundizar en el conocimiento y el aprecio de las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
b) Profundizar en el conocimiento y el aprecio de los elementos específicos de la cultura andaluza para que sea valorada y respetada como patrimonio propio y en el marco de la cultura española y universal.

Estos objetivos serán alcanzados por el alumnado mediante cada una de las materias, que marcan las capacidades que desarrollarán el alumnado. En concreto nos vamos a centrar a continuación en los objetivos de la materia en la que nosotros estamos centrados: Matemáticas II.

6.4.2 Objetivos generales del área (Matemáticas II)

En este apartado, se desarrollan los objetivos de la materia Matemáticas II para la etapa de Bachillerato:

Cuadro 6.4: Objetivos generales de la materia Matemáticas II. (Elaboración propia)

Objetivos de la materia Matemáticas II
1. Conocer, comprender y aplicar los conceptos, los procedimientos y las estrategias matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio y el conocimiento de las distintas áreas del saber, ya sea en el de las propias matemáticas o el de otras ciencias, así como su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana y de otros ámbitos.
2. Conocer la existencia de demostraciones rigurosas como pilar fundamental para el desarrollo científico y tecnológico.
3. Usar procedimientos, estrategias y destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación, formulación, contraste de hipótesis, aplicación de deducción e inducción...) para enfrentarse y resolver investigaciones y situaciones nuevas con autonomía y eficacia.
5. Utilizar los recursos y los medios tecnológicos actuales para la resolución de problemas y para facilitar la comprensión de distintas situaciones dado su potencial para el cálculo y la representación gráfica.
6. Adquirir y manejar con desenvoltura vocabulario de términos y notaciones matemáticas, y expresarse con rigor científico, precisión y eficacia de forma oral, escrita y gráfica en diferentes circunstancias que se puedan tratar matemáticamente.
7. Emplear el razonamiento lógico-matemático como método para plantear y abordar problemas de forma justificada, y mostrar una actitud abierta, crítica y tolerante ante otros razonamientos u opiniones.
8. Aplicar diferentes estrategias y demostraciones, de forma individual o en grupo, para la realización y la resolución de problemas, investigaciones matemáticas y trabajos científicos, comprobando e interpretando las soluciones encontradas para construir nuevos conocimientos, y detectando incorrecciones lógicas.
9. Valorar la precisión de los resultados, el trabajo en grupo y las distintas formas de pensamiento y razonamiento para contribuir a un mismo fin.

Fuente: Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

6.4.3 Objetivos didácticos de la unidad.

Finalmente, se exponen los objetivos que se pretenden alcanzar a un nivel didáctico al finalizar la unidad.

Cuadro 6.5: Objetivos didácticos de la unidad específica desarrollada. (Elaboración propia)

Objetivos didácticos de la unidad
Saber unir y relacionar la descripción algebraística de las matemáticas con la interpretación geométrica del problema
Ser capaz de usar los conceptos geométricos para resolver problemas métricos relacionados con distancias, áreas o volúmenes.
Conocer los lugares geométricos, así como su tratamiento analíticos

6.5 Competencias clave

Se define como competencia clave a aquellas capacidades que las personas utilizan para desarrollar diferentes ámbitos relacionados con su personalidad, así como el crecimiento de un espíritu ciudadano o otras formas de desarrollo como la inclusión social o la obtención de empleo. Las competencias clave vienen definidas a través de la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la comunidad Autónoma de Andalucía.

En concreto, son las mostradas en la siguiente tabla:

Cuadro 6.6: Competencias clave de etapa de Bachillerato en la comunidad Autónoma de Andalucía (Elaboración propia)

Competencias clave
Competencia social y cívica. (CSYC)
Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. (SIEP)
Competencia para aprender a aprender. (CAA)
Competencia en comunicación lingüística. (CCL)
Competencia digital. (CD)
Conciencia y expresiones culturales. (CEC)
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (CMCT)

Fuente: Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

Esta unidad contribuye a la adquisición de las competencias clave en los siguientes aspectos

- **Competencias sociales y cívicas:** La aportación a las competencias sociales y cívicas se produce al utilizar la geometría para describir fenómenos sociales, predecir y tomar decisiones, adoptando una actitud abierta ante puntos de vista ajenos, valorando las diferentes formas de abordar una situación y mostrando una actitud abierta ante diferentes soluciones.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:** La resolución de problemas desde un punto de vista geométrico fomenta de forma especial el sentido de iniciativa así como el espíritu emprendedor, al planificar estrategias de resolución, asumir retos geométricos complejos, y favorecer estrategias destinadas a la toma de decisiones para elegir que tipo de metodología se amolda mejor al tipo de problema geométrico en cuestión.
- **Competencia de aprender a aprender:** La competencia de aprender a aprender en esta unidad se realiza a partir de la construcción de modelos geométricos, además de perseve-

rancia y reflexión crítica a través de la comprobación de resultados con herramientas como Geogebra.

- Competencia en comunicación lingüística: La Geometría desarrolla la competencia en comunicación lingüística ya que utiliza continuamente la expresión y comprensión oral y escrita, tanto en la formulación de ideas y comunicación de los resultados obtenidos como en la interpretación de enunciados.
- Competencia digital: La competencia digital se trabaja utilizando herramientas TIC, como Geogebra, para servir de apoyo a la resolución de problemas y la comprobación de la solución.
- Competencia en conciencia y expresiones culturales: El conocimiento geométrico es, en sí mismo, expresión universal de la cultura, ya que se trata de un elemento principal en la construcción de las edificaciones. La geometría que se estudia en este trabajo, supone una parte muy importante en la expresión artística ya que ofrece un mecanismo para describir la naturaleza y el mundo que nos rodea y nos ofrece la capacidad de presenciar la belleza de las diferentes manifestaciones artísticas.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: La Geometría es un eje fundamental en el desarrollo de la competencia matemática y en las competencias básicas en ciencia y tecnología. El razonamiento matemático se encuentra presente constantemente con el fin de resolver diversos problemas; en particular, engloba los siguientes aspectos: uso del pensamiento para modelar o razonar desde un punto de vista matemático, de forma que se puedan plantear diferentes problemas plantear y resolverlos, uso del lenguaje matemático para representar los diferentes conceptos y entidades matemáticas y por último, uso de los símbolos matemáticos que nos ofrecen la posibilidad de comunicarnos sin necesidad de compartir un lenguaje común.

6.6 Contenidos

Sobre los contenidos de esta sesión cabría indicar que se van a tener en cuenta conforme al Real Decreto 1105/2014, en el siguiente cuadro se muestran los contenidos del bloque IV de Geometría, dentro de la asignatura de matemáticas II de segundo de bachillerato, así como sus criterios de evaluación y estándares de aprendizajes.

En particular, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables aplicables a la unidad objeto de este trabajo son las marcadas en **negrita** en el cuadro 6.7 .

Cuadro 6.7: Bloque IV: Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables. (Elaboración propia)

Bloque IV: Geometría		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizajes evaluables
<p>1. Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.</p> <p>2. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y plano)</p> <p>3. Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).</p>	<p>1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.</p> <p>2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.</p> <p>3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.</p>	<p>1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.</p> <p>2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.</p> <p>2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente</p> <p>2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.</p> <p>2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.</p> <p>3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.</p> <p>3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.</p> <p>3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.</p> <p>3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.</p>

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El bloque “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas” es un bloque común a la etapa y transversal que debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenido y que es el eje fundamental de la asignatura; se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. Se hará uso además de estos contenidos para el desarrollo de la unidad.

Cuadro 6.8: Bloque I, Tabla de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables. (Elaboración propia)

Bloque I: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizajes evaluables
<p>Planificación del proceso de resolución de problemas.</p> <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto.</p> <p>Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes.</p> <p>Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc.</p> <p>Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.</p> <p>Razonamiento deductivo e inductivo</p> <p>Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.</p> <p>Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.</p> <p>Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.</p> <p>Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.</p> <p>Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.</p> <p>Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</p> <p>Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:</p> <p>a) la recogida ordenada y la organización de datos;</p> <p>b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos;</p> <p>c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;</p> <p>d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas;</p> <p>e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.</p> <p>f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 4. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: <ol style="list-style-type: none"> a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 10. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 13. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilista. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Fuente: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

6.7 Metodología

Para el desarrollo de este apartado haremos uso de la definición de metodología didáctica propuesta en el Real Decreto 1105/2014:

«Conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados potenciando el desarrollo de las competencias clave desde una perspectiva transversal»

La metodología didáctica tendrá como objetivo guiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de unidad didáctica, y dará respuesta a propuestas pedagógicas que consideren la atención a la diversidad y el acceso de todo el alumnado a la educación común.

No cabe duda que el estudio de la geometría en el espacio presenta varias dificultades en su desarrollo formal. Principalmente estas dificultades se dan a partir de las concepciones y creencias del alumnado y profesorado. Además, las clases de geometría generalmente son desarrolladas de manera abstracta, ya que la enseñanza de esta rama está limitada al hecho de conceptualizar los conceptos sobre el papel, dada su alta complejidad en plasmar los contenidos usando recursos o ejemplos reales. Además el trabajo de algebrización emparejado al desarrollo geométrico requiere ciertas tareas repetitivas para mecanizar procedimientos y métodos de resolución de problemas.

La interacción entre la geometría y el álgebra contribuye a reforzar la capacidad de los estudiantes para analizar desde distintos puntos de vista un mismo problema geométrico y para visualizar el significado de determinadas expresiones algebraicas, por ejemplo, ecuaciones y curvas, matrices y transformaciones geométricas, resolución de ecuaciones y posiciones de distintos elementos geométricos.

Teniendo todo esto en cuenta, se propone el empleo de las siguientes estrategias metodológicas para intentar favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje en la geometría:

- La principal metodología que se usará en este trabajo, como se ha justificado en el apartado de Fundamentación didáctica. será la metodología ABP junto con el uso de Geogebra como herramienta TIC.
- Modelo metodológico de Van Hiele, en el que el aprendizaje de la geometría se construye pasando por los diferentes niveles (Vargas y Araya, 2013)
 - Visualización o reconocimiento, las descripciones de los conceptos geométricos son principalmente visuales y se comparan con elementos familiares de su entorno
 - Análisis, donde se perciben las propiedades de los elementos geométricos;
 - Ordenación y clasificación, donde el alumnado entiende las definiciones y reconoce propiedades que derivan unas de otras.
 - Deducción formal, en el alumno es capaz de realizar demostraciones y se comprende las propiedades geométricas así como su naturaleza axiomática.
 - Rigor. El alumno es capaz de analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría
- Metodología activa. En esta metodología el aprendizaje está centrado en la actividad y la participación del alumnado, tratando de favorecer el pensamiento crítico y racional. Se incentivará tanto el trabajo individual como el cooperativo del alumnado en el aula.
- Es esencial la utilización de programas de geometría dinámica como Geogebra, como herra-

mienta para favorecer la comprensión y el afianzamiento de los conocimientos geométricos en el aprendizaje del alumnado.

- Se emplearán estrategias metodológicas que, partiendo de la perspectiva del profesorado como orientador, promotor y facilitador del desarrollo en el alumnado, se ajusten al nivel competencial inicial de este y tengan en cuenta la atención a la diversidad y el respeto por los distintos ritmos y estilos de aprendizaje mediante prácticas de trabajo individual y cooperativo.
- Metodologías basadas en el uso de recursos tecnológicos para obtener y procesar información. Se podrán utilizar calculadoras y aplicaciones informáticas (hojas de cálculo, programas de álgebra computacional, programas de geometría dinámica) tanto para la comprensión de conceptos y la resolución de problemas como para hacer los cálculos, con el fin de que sea más importante llegar a las conclusiones y analizarlas que el simple hecho de realizarlos con mayor o menor precisión, sin obviar que se puede potenciar la fluidez y la precisión en el cálculo mental y manual simple en todo tipo de procesos sencillos que servirán de modelo a otros más complejos.

6.8 Actividades y recursos

La utilización de variedad de recursos y el uso de diferentes actividades, es una herramienta clave para desarrollar una unidad didáctica correctamente. Desde el punto de vista de diseño de la unidad, nos ayuda a abrir un amplio abanico de posibilidades con las que podemos ajustar y moldear los contenidos y objetivos que se desean conseguir utilizando incluso una o varias metodologías específicas.

6.8.1 Actividades

Para alcanzar los objetivos y contenidos de esta unidad, se han diseñado un conjunto de actividades en las que se utilizará las diferentes estrategias metodológicas. En la sección 6.10, se incluye la temporalización de las actividades propuestas y en los anexos, se podrán encontrar el desarrollo de las mismas.

El tipo de actividades didácticas que se van a usar en esta unidad son las siguientes (Luque-Cañada, 2018)

Cuadro 6.9: Tipo de actividades didácticas (Luque-Cañada, 2018)

Act. Diagnóstico (DIAG)	Busca conocer el nivel del alumnado y suelen ser colectivas
Act. Introducción (INT)	Tratan de contextualizar la información para adaptar los conocimientos y posteriormente poder realizar un correcto desarrollo de contenidos
Act. Motivación (MOT)	Tienen como objetivo despertar curiosidad en los alumnos para aumentar su motivación e implicación
Act. Aprendizaje (AP)	Aquellas acciones que realiza el alumno como parte del proceso instructivo que sigue
Act. Desarrollo (DES)	Actividades para fijar y desarrollar los contenidos de la unidad
Act. Consolidación (CON)	Cuyo objetivo es ayudar a los alumnos a consolidar los conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo de la Unidad Didáctica.
Act. Creativa (CRE)	Actividades para aumentar la capacidad de crear nuevas ideas o conceptos, de nuevas asociaciones entre ideas y conceptos conocidos, que habitualmente producen soluciones originales.
Act. Evaluación (EV)	Actividades concretas con las que se evaluará a los alumnos para ver si han alcanzado los objetivos previstos
Act. Recuperación (REC)	Actividades destinada a quienes no han alcanzado los objetivos.
Act. Ampliación (AMP)	Permiten continuar construyendo conocimientos o profundizar en ellos a aquellos que superan con facilidad los objetivos propuestos
Act. Refuerzo (REF)	Se realizan con el alumnado que no ha adquirido alguno de los aprendizajes básicos y prioritarios, los más importantes y necesarios para poder seguir aprendiendo.

6.8.2 Materiales y recursos

En el desarrollo de la unidad didáctica se utilizarán los siguientes materiales y recursos:

- Libro de texto Matemáticas II ANAYA (J. Colera/ MJ. Oliveira).
- Fotocopias para las actividades propuestas
- Pizarra, tanto de forma digital como la convencional. Será utilizada para la explicación y exposición de contenidos de la unidad y posteriormente para la corrección de actividades.
- Calculadora científica. Será utilizada en aquellas actividades que sea obligatorio, incidiendo en gran medida en el uso adecuado y correcto de las calculadoras.
- Material de dibujo: regla, compás, escuadra, etc. Importante para la representación de rectas, planos y en general cualquier representación geométrica.
- Ordenador para el uso de herramientas TIC (Geogebra Classic, Geogebra Notes, Youtube, Google classroom, Kahoot etc)
- Teléfonos inteligentes o tabletas.
- Recursos humanos principales, como el profesorado de la propia asignatura o de otras de asignaturas afines como puede ser Física o Tecnología.

En el libro de texto de Matemáticas propuesto se proporciona un banco de recursos en el que podemos encontrar:

- Sugerencias sobre cómo abordar el trabajo de determinados apartados y actividades.
- Ejemplos para practicar los procedimientos más importantes.
- Ejercicios de aplicación de todos los contenidos que se han ofrecido a lo largo de la exposi-

ción teórica

- Ejercicios y problemas resueltos.
- Lecturas, consejos, informaciones...
- Fichas fotocopiables de refuerzo y ampliación para el tratamiento de la diversidad.

6.9 Atención a la diversidad

La importancia de la atención a la diversidad es crucial en esta programación didáctica. Por ello, las diferentes actuaciones educativas aquí propuestas tienen como fin dar respuesta a los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje, teniendo en cuenta la capacidad de cada alumno, así como su motivación, interés, situación socio económica y cultural, lingüística y de salud.

El objetivo principal será facilitar el acceso a los aprendizajes propios de la etapa de bachillerato, incluidas las competencias clave y objetivos definidos en los apartados anteriores, ofreciendo flexibilidad en la variedad de tareas y recursos metodológicos que se plantean para poder adaptarse mejor a las necesidades de cada persona. Se hará uso del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) que no es más que una metodología inclusiva que permite, mediante un currículo flexible, adaptar y ajustarse a las necesidades y a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado (Figuerola, Ospina y Tuberquia, 2019). Centrado en comprender “qué”, “cómo” y “porqué” se aprende, el DUA se desarrolla a través de tres principios y nueve pautas para ofrecer formas de motivar al estudiante y favorecer su compromiso, representar la información y, en concreto, hacer innecesaria, o minimizar la necesidad de la adaptación individual.

Se detallarán a continuación las diferentes medidas de atención a la diversidad propuestas para esta unidad, relacionadas con el tipo de actividades que se van a usar:

- Uso de actividades y tareas para estimular diferentes procesos cognitivos, evitando centrarse únicamente en alguno de ellos con el objetivo de permitir desarrollar los diferentes estilos de aprendizaje
- Uso de actividades cooperativas que requieran el trabajo en equipo para su realización. La ayuda entre iguales es una herramienta que permitirá al alumnado aprender de los demás estrategias, destrezas y habilidades que contribuirán al desarrollo de sus capacidades y a la adquisición de las competencias clave.
- Uso de actividades de refuerzo, realizadas con el alumnado que no ha adquirido alguno de los aprendizajes básicos y/o prioritarios, tratando de adaptarse al contexto y al ritmo de aprendizaje del alumnado, para aumentar la motivación y anular los problemas que entorpezcan el aprendizaje.
- Uso de actividades de ampliación, que permiten continuar construyendo conocimientos o profundizar en ellos a aquellos alumnos que superan con facilidad los objetivos propuestos. Permiten enriquecer, profundizar e investigar más en los conocimientos trabajados, e incluso adaptarlos a sus intereses personales, lo cual puede beneficiar además al grupo.
- Uso de actividades de acuerdo a las características individuales, facilitando los procesos de detección y tratamiento de dificultades de aprendizaje tan pronto como se presente, haciendo uso de la orientación educativa y de la familia si fuese necesario. En cuanto a estas necesidades individuales, será necesario detectar qué alumnado requiere mayor seguimiento educativo o personalización de las estrategias para planificar refuerzos o ampliaciones, gestionar convenientemente los espacios y tiempos, proponer intervención de recursos humanos y materiales, y ajustar el seguimiento y evaluación de sus aprendizajes.

Estas medidas se llevarán a cabo con el objeto de favorecer la autoestima y expectativas positivas en el alumnado y en su entorno familiar. Dado que estamos en una asignatura de Matemáticas, se contempla la posibilidad de aplicar otras medidas si fuera necesario:

- Agrupamientos flexibles y no discriminatorios
- Desdoblamientos de grupos
- Apoyo en grupos ordinarios
- Programas y planes de apoyo
- Refuerzo y recuperación
- Adaptaciones curriculares

Cada una de estas medidas tienen como objetivo garantizar el derecho de todo el alumnado a alcanzar el máximo desarrollo personal, intelectual, social y emocional en función de sus características y posibilidades, para aprender a ser competente y vivir en una sociedad diversa en continuo proceso de cambio, con objeto de facilitar que todo el alumnado alcance la correspondiente titulación.

Además se hace especial atención al alumnado que requiere medidas específicas de apoyo educativo (alumnado de incorporación tardía, con necesidades educativas especiales, con altas capacidades intelectuales...). Para ello, se realiza una evaluación inicial al inicio de la unidad para identificar las competencias que el alumnado tiene adquiridas. Finalmente, en el caso de tener algún alumno que necesite adaptaciones significativas que afecten al currículo, se atenderá a lo establecido en la normativa, y siempre manteniendo la máxima de adaptarse a las necesidades específicas de apoyo educativo del alumnado.

6.10 Temporalización

Con el objetivo de enmarcar y temporalizar la unidad didáctica que se va a desarrollar dentro del Bloque de Geometría, se va a definir un marco de referencia temporal para el año 2021-2022 en la provincia de Jaén. El calendario escolar, teniendo en cuenta festivos locales y nacionales constará de 178 días lectivos.

Se asumirá una asignación horaria para esta asignatura de 4 horas semanales, de tal forma que el curso estaría compuesto por unas 142 sesiones. Para asumir y/o acomodar posibles imprevistos, relacionados con la prueba de acceso a la universidad, repasos y ampliaciones, teniendo en cuenta que el temario de segundo de bachillerato es bastante extenso, la programación se ha ajustado a 30 semanas de curso con 120 sesiones.

Cuadro 6.10: Temporalización asignatura Matemáticas II en el curso completo. (Elaboración Propia)

Bloque	Unidades	Sesiones
ÁLGEBRA (18 sesiones)	Unidad 1. Matrices	5
	Unidad 2. Determinantes	5
	Unidad 3. Sistema de ecuaciones	8
GEOMETRÍA (30 sesiones)	Unidad 4. Vectores en el espacio	9
	Unidad 5. Rectas y planos en el espacio	10
	Unidad 6. Propiedades métricas	11
ANÁLISIS (56 sesiones)	Unidad 7: Funciones.	8
	Unidad 8. Límites y Continuidad	8
	Unidad 9. Derivadas. Técnicas de derivación	8
	Unidad 10. Aplicaciones de las derivadas	12
	Unidad 11. Cálculo de primitivas	12
	Unidad 12. La integral definida. Aplicaciones	8
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (16 sesiones)	Unidad 13. Probabilidad	8
	Unidad 14. Distribuciones de probabilidad. Binomial y normal	8

A la unidad «Propiedades métricas» se le asocian 11 sesiones y el desarrollo pormenorizado de cada una de ellas se encuentra en la Sección 6.12.

6.11 Evaluación

Los criterios de evaluación de esta unidad didáctica estarán basados con los propuestos en el R.D. 984/2021, del 16 de noviembre, por el que se regula la evaluación y promoción de las diferentes etapas académicas. Entenderemos el concepto de criterios de evaluación como:

El referente específico para evaluar el aprendizaje del alumnado. Describen aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, tanto en conocimientos como en competencias; responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.

Es importante notar que estos criterios son una herramienta para evaluar tanto al alumno, en el que su aprendizaje es el principal objetivo de la enseñanza, como al profesor, que es el encargado de transmitir los conocimientos.

Entre las características de la evaluación del aprendizaje diremos que debe de ser continua, al estar completamente integrada en el proceso de enseñanza y en la que se considera el progreso del alumnado durante las diferentes sesiones. Además se buscará favorecer la mejora constante en el proceso de enseñanza-aprendizaje teniendo siempre en cuenta el contexto del centro y las características de los alumnos. La evaluación se realizará con plena objetividad usando los referentes para la evaluación como el cumplimiento de los estándares de aprendizaje evaluables. La evaluación final se realizará al final de un determinado periodo de proceso de enseñanza-aprendizaje y tendrá como objetivo evaluar en qué medida se han alcanzado los diferentes objetivos y competencias.

6.11.1 Procedimiento de evaluación

Los procedimientos de evaluación determinan el modo de realizar el proceso de evaluación. Para ello, se fijarán las diferentes técnicas e instrumentos que darán respuesta al quién, qué y cómo se

quiere evaluar.

Técnicas de evaluación

Las técnicas usadas para la evaluación son las siguientes:

- Técnicas de observación directa y continua, evaluando principalmente la implicación del alumnado en el desarrollo de la unidad,
- Técnicas de autoevaluación del alumnado, en las que los propios alumnos valoran sus propias dificultades y fortalezas, con el objetivo de favorecer la reflexión individualizada.
- Técnicas académicas, que incluyen pruebas escritas y actividades entregables o grupales.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación no son más que una herramienta para la recogida de datos e información acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este trabajo se utilizarán los siguientes

- Cuaderno docente, donde se recoge las evaluaciones de las distintas actividades de aprendizaje realizadas por el alumnado a lo largo del curso. Nos ayudará a medir la implicación del alumnado, así como tener un seguimiento continuo de los mismos.
- Cuaderno del alumno, que incluirán los apuntes tomados por los alumnos así como los problemas que se resuelvan en clase. Se valorará la claridad, el orden y el seguimiento continuo de las diferentes actividades
- Trabajo grupal (Ver Anexo 1). Será una herramienta para medir la expresión oral y escrita, el uso de herramientas TIC y la creatividad del alumnado.
- Pruebas y actividades escritas, como la prueba individual, actividades de recuperación y ampliación y las actividades colaborativas.

6.11.2 Calificación final

La calificación no es más que una cuantificación para categorizar el rendimiento escolar del alumnado. Su objetivo es expresar de forma cuantitativa, mediante una nota, en qué medida se han alcanzado los diferentes objetivos y competencias.

En el Anexo 2, se incluyen cuatro rúbricas de evaluación de los diferentes instrumentos usados para evaluar esta unidad didáctica.

La nota final vendrá dada por la suma ponderada de las diferentes partes evaluadas en dichas rúbricas. En el cuadro 6.11 se recoge la ponderación de cada área evaluada:

Cuadro 6.11: Ponderaciones para la calificación final del alumnado (Elaboración propia)

Evaluación	Porcentaje	Nota
Participación del alumno	10%	
Actividades	10%	
Trabajo grupal	20%	
Examen final	60%	
NOTA FINAL		

Los resultados de la evaluación se expresarán de la siguiente forma

- Insuficiente (IN): 1, 2, 3, 4
- Suficiente (SU): 5,
- Bien (BI): 6,
- Notable (NT): 7, 8
- Sobresaliente (SB): 9, 10

La repartición de pesos tiene como objetivo realizar una evaluación continua, favoreciendo a los alumnos que participen en clase, realicen las actividades que se proponen y realicen un buen trabajo grupal y examen.

El profesorado decidirá, al acabar la sesión y haber evaluado todos estos aspectos, si el alumno o la alumna ha logrado los objetivos y ha alcanzado el adecuado grado de adquisición de las competencias correspondientes.

6.11.3 Evaluación de los procesos de enseñanza: autoevaluación docente

El artículo 91 de la LOE consolidada por la LOMLOE, establecen, entre las funciones del profesorado, la evaluación tanto del proceso de aprendizaje del alumnado, como del proceso de enseñanza. Es por ello que, se evaluará continuamente la práctica docente, mediante criterios que evalúen tanto los objetivos docentes propuestos para el desarrollo de la programación didáctica, como las competencias docentes –saber, saber hacer y saber ser– (Proyecto Tuning, 2003), mediante procesos metacognitivos, para valorar su eficacia y mejorar el proceso de enseñanza, estableciendo propuestas de mejora, con el fin de realizar una docencia de calidad y, así, mejorar el rendimiento del alumnado.

Cuadro 6.12: Rúbrica de autoevaluación docente (Elaboración propia)

ESCALA DE ESTIMACIÓN DE COMPETENCIAS DOCENTES							
ÁMB COMP.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	1	2	3	4		
SABER	Conozco las características de mi grupo						
	Conozco recursos y metodologías adecuadas para mi alumnado						
SABER HACER	Aplico los principios del DUA y las metodologías de forma adecuada.						
	Domino el uso de los recursos herramientas TIC						
	Hago del aula un lugar donde el alumnado esté cómodo, feliz y motivado.						
SABER SER	Demuestro empatía, compasión y entendimiento con mi alumnado						
	Muestro mi compromiso docente en el aula y evidenciar mi vocación						
	Disfruto del trabajo en el aula y en el centro.						
1: Nunca		2: A veces		3: Frecuentemente		4: Siempre	

6.12 Desarrollo pormenorizado de las sesiones

A continuación se desarrollan las diferentes sesiones, incluyendo los estándares de aprendizaje utilizado en cada una de ella (tanto del bloque de Geometría como del bloque de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas), las competencias clave, metodología usada y tipo de actividades:

Cuadro 6.13: Desarrollo de la sesión 1: Introducción. (Elaboración propia)

Sesión 1: Introducción	
Desarrollo de la sesión:	<p>La primera parte de la sesión se utilizará para recordar los conceptos previos geométricos ya estudiados en las sesiones anteriores dentro del bloque de Geometría: «Vectores en el espacio» y «Rectas y planos en el espacio». Para ello, la sesión comenzará realizando una tormenta de ideas participativa de los conceptos previos geométricos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Significado geométrico del producto escalar, vectorial y mixto - Problemas afines: concepto de intersecciones, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos. <p>El profesor guiará esta sesión, cuyo objetivo será resolver dudas, moderar y dinamizar la participación de los alumnos. (30')</p> <p>La segunda parte de la sesión, se utilizará para introducir el proyecto «Actividad de Modelización geométrica» (Ver anexo 1) que deberán realizar los alumnos a lo largo de la unidad completa y que deberán entregar en la última sesión. En cada una de las sesiones el profesor dedicará los 5 minutos finales de la clase para resolver las dudas de cada grupo. (30')</p>
Estándares de aprendizaje:	<p>Geometría: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2</p> <p>PMAM: 1.1, 6.1, 6.2, 6.3, 8.2, 8.4</p>
Competencias clave:	CSYC, SIEP, CAA, CCL, CMCT
Metodología:	<p>Se utilizará una metodología activa en la que los alumnos serán los protagonistas. Trabajarán de forma participativa usando la ayuda entre iguales para introducir los conceptos necesario para desarrollar la unidad y resolver las dudas que se planteasen provenientes de unidades anteriores. El profesor utilizará esta información para evaluar los conocimientos de los alumnos y valorar el nivel de profundización así como los refuerzos que necesita el grupo.</p> <p>En la segunda parte de la sesión, se hará uso del aprendizaje basado en proyectos (ABP). El profesor definirá los objetivos, así como los recursos necesarios para el trabajo. Se busca desarrollar el pensamiento crítico e incrementar la creatividad y el aprendizaje autónomo y grupal.</p>
Tipo de actividades:	INT, DIAG, MOT

6 Proyección didáctica

Cuadro 6.14: Desarrollo de la sesión 2: Introducción a los problemas métricos. (Elaboración propia)

Sesión 2: Introducción a los problemas métricos	
Desarrollo de la sesión:	En esta sesión, se revisarán los diferentes procedimientos métricos para resolver problemas afines (Dirección de planos y rectas, plano paralelo a dos rectas, recta definidas por dos planos.) (30') Resolución de problemas propuestos para afianzar contenidos propuestos (25') Resolución dudas proyecto grupal (5')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 2.1, 2.2, 2.4, 3.1 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 5.1, 8.2, 8.4, 9.1
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CMCT.
Metodología:	En la primera parte de la sesión el profesor utilizará la metodología convencional o clásica, de exposición de contenidos, con el fin de contextualizar el inicio de la unidad. Posteriormente, la idea es resolver los problemas propuestos haciendo uso del aprendizaje basado en el pensamiento. Los alumnos serán protagonistas de esta parte de la sesión y su objetivo es desarrollar destrezas más allá de la memorización, en busca de un pensamiento eficaz.
Tipo de actividades:	INT, AP, CON

Cuadro 6.15: Desarrollo de la sesión 3: Medida de ángulos entre rectas y planos. (Elaboración propia)

Sesión 3. Medida de ángulos entre rectas y planos.	
Desarrollo de la sesión:	En esta sesión el profesor realizará una clase convencional en la que introducirá los siguientes conceptos y luego resolverá problemas relacionados en la pizarra. <ul style="list-style-type: none"> • Ángulo entre dos rectas • Ángulo entre dos planos • Ángulo entre una recta y un plano TIEMPO LIBRE (55") Resolución dudas proyecto grupal (5')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.3 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 5.1, 8.2, 8.4, 9.1
Competencias clave:	CSYC, SIEP, CAA, CCL, CMCT
Metodología:	Metodología convencional, de exposición de contenidos, con el fin de contextualizar y asentar los conocimientos. Posteriormente, metodología activa a la hora de resolver los problemas en la pizarra.
Tipo de actividades:	AP, DES

Cuadro 6.16: Desarrollo de la sesión 4: Distancia entre puntos rectas y planos. (Elaboración propia)

Sesión 4. Distancia entre puntos, rectas y planos. Auto-aprendizaje guiado	
Desarrollo de la sesión:	<p>El profesor ofrecerá diferentes links a Geogebra donde los alumnos podrán investigar los siguientes contenidos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Distancia entre dos puntos • Distancia entre un punto y una recta • Distancia de un punto a un plano <p>El auto-aprendizaje será guiado e individual (30') Resolución de problemas propuestos en parejas (25') Resolución dudas proyecto grupal (5')</p>
Estándares de aprendizaje:	<p>Geometría: 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 4.2, 5.1, 8.2, 8.3, 8.4, 10.1, 11.4</p>
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CMCT, CD
Metodología:	<p>Metodología en la cual el alumnado se convierte en el principal protagonista de su aprendizaje contando con el apoyo de las TIC (mediante un ordenador portátil).</p> <p>El profesor, otorgará al alumno a través de la plataforma de docencia los recursos necesarios para guiar el proceso de auto-aprendizaje del alumno. Actuará como figura espectadora, donde simplemente resolverá las dudas planteadas de forma individual y ayudará al alumno a guiarse por los recursos que ha facilitado. El material seleccionado ha sido revisado con anterioridad por el profesor y es publicado en la plataforma de forma clara e intuitiva. Por otro lado el alumnado, navegará por los distintos recursos dados por el profesor para lograr adquirir el conocimiento previsto en esa sesión, de forma individual.</p> <p>En la segunda parte, los alumnos son agrupados por parejas en función de las facilidades y dificultades de aprendizaje. El profesor cobra un papel más activo, ya que pasará por las parejas para asegurar que los conocimientos están siendo adquiridos. En el caso de que detecte que no ha sido así en alguna pareja, el profesor se encargará de explicar los contenidos a la misma. La pareja de alumnos, tendrá que resolver, de manera conjunta, los ejercicios y retos planteados por el profesor en base al conocimiento que han adquirido. De esta forma, los alumnos pueden contrastar información y explicarse entre ellos los conceptos en los que difieran; siempre contando con la figura del profesor para resolver problemas, dudas o conflictos.</p>
Tipo de actividades:	MOT, AP, DES, CRE

6 Proyección didáctica

Cuadro 6.17: Desarrollo de la sesión 5: Distancia entre puntos rectas y planos (Continuación). (Elaboración propia)

Sesión 5. Distancia entre puntos, rectas y planos (Continuación). Auto-aprendizaje guiado	
Desarrollo de la sesión:	<p>El profesor ofrecerá diferentes links a Geogebra donde los alumnos podrán investigar los siguientes contenidos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Distancia de una recta a un plano • Distancia entre dos planos • Distancia entre dos rectas <p>El auto-aprendizaje será guiado e individual (30') Resolución de problemas propuestos en parejas (25') Resolución dudas proyecto grupal (5')</p>
Estándares de aprendizaje:	<p>Geometría: 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 4.2, 5.1, 8.2, 8.3, 8.4, 10.1, 11.4</p>
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CD, CMCT
Metodología:	<p>Metodología en la cual el alumnado se convierte en el principal protagonista de su aprendizaje contando con el apoyo de las TIC (mediante un ordenador portátil).</p> <p>El profesor, otorgará al alumno a través de la plataforma de docencia los recursos necesarios para guiar el proceso de auto-aprendizaje del alumno. Actuará como figura espectadora, donde simplemente resolverá las dudas planteadas de forma individual y ayudará al alumno a guiarse por los recursos que ha facilitado. El material seleccionado ha sido revisado con anterioridad por el profesor y es publicado en la plataforma de forma clara e intuitiva. Por otro lado el alumnado, navegará por los distintos recursos dados por el profesor para lograr adquirir el conocimiento previsto en esa sesión, de forma individual.</p> <p>En la segunda parte, los alumnos son agrupados por parejas en función de las facilidades y dificultades de aprendizaje. El profesor cobra un papel más activo, ya que pasará por las parejas para asegurar que los conocimientos están siendo adquiridos. En el caso de que detecte que no ha sido así en alguna pareja, el profesor se encargará de explicar los contenidos a la misma. La pareja de alumnos, tendrá que resolver, de manera conjunta, los ejercicios y retos planteados por el profesor en base al conocimiento que han adquirido. De esta forma, los alumnos pueden contrastar información y explicarse entre ellos los conceptos en los que difieran; siempre contando con la figura del profesor para resolver problemas, dudas o conflictos.</p>
Tipo de actividades:	MOT, AP, DES, CRE

6 Proyección didáctica

Cuadro 6.18: Desarrollo de la sesión 6: Medida de áreas y volúmenes en el espacio. Gamificación.
(Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 6: Medida de áreas y volúmenes en el espacio. Gamificación.	
Desarrollo de la sesión:	En esta sesión se realizará un juego que incluirá a toda la clase. El objetivo será calcular el volumen de un tetraedro que traerá el profesor a clase. Los alumnos harán grupos y estudiarán en conjunto las diferentes formas de calcular áreas y volúmenes en el espacio utilizando la geometría espacial. El grupo que antes consiga aprehender los conocimientos y realizar el cálculo correcto del tetraedro ganará la sesión y será recompensado positivamente en la evaluación participativa, de interés. El profesor estará de apoyo en la clase guiando a los alumnos si tienen alguna duda. Resolución dudas proyecto grupal (5')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.3, 3.4 PMAM: 6.1, 6.2, 11.1, 11.2, 11.3
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CD, CMCT
Metodología:	Metodología basada en la gamificación intentando potenciar al máximo las habilidades de los alumnos a través de un juego de velocidad, ya que facilita alcanzar aprendizajes más significativos y funcionales
Tipo de actividades:	EV, MOT, AP, DES

Cuadro 6.19: Desarrollo de la sesión 7: Uso de herramienta CAD para representación de diferentes entidades geométricas (Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 7: Uso de herramienta CAD para representación de diferentes entidades geométricas	
Desarrollo de la sesión:	Esta sesión se realizará en el aula TIC, de forma que los alumnos puedan usar el ordenador. El profesor introducirá CATIA, un programa informático de diseño, fabricación e ingeniería asistida por computadora representación. El profesor guiará a los alumnos al aprendizaje de este software. Una vez explicado como funciona el programa los alumnos podrán realizar actividades relacionadas con la geometría espacial. Esta sesión es de ampliación de conocimientos buscando una visión más tecnológica de las matemáticas y haciéndoles ver a los alumnos la importancia de las matemáticas en el mundo real. Resolución dudas proyecto grupal (5')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 4.2, 5.1, 8.2, 8.3, 8.4, 10.1, 11.4
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CD, CMCT
Metodología:	Metodología activa contando con el apoyo de las TIC (mediante un ordenador portátil).
Tipo de actividades:	MOT, AP, CRE

6 Proyección didáctica

Cuadro 6.20: Desarrollo de la sesión 8: Repaso general. Problemas de selectividad. (Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 8: Repaso general. Problemas de selectividad.	
Desarrollo de la sesión:	Resolución de ejercicios de toda la unidad a modo de repaso (30') Además se propondrá resolver problemas de selectividad en la pizarra. (25') Resolución dudas proyecto grupal (5')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 6.1, 6.2, 6.3, 8.2, 8.4
Competencias clave:	CCL, CMCT, CD, CAA, SIEP.
Metodología:	Metodología activa en la que el profesor tiene constante interacción con los alumnos, debatiendo con los alumnos la soluciones de los ejercicios
Tipo de actividades:	AP, DES

Cuadro 6.21: Desarrollo de la sesión 9: Prueba individual: Examen. (Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 9: Prueba individual: Examen	
Desarrollo de la sesión:	En esta sesión se realizará una prueba individual a cada alumno. Además se revisará el cuaderno de cada uno para analizar estructuras, orden y limpieza en sus notas tomadas durante clase (60').
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 5.1, 6.3, 8.2, 9.1
Competencias clave:	CCL, CMCT
Metodología:	Los alumnos se separan y realizan el examen de forma individual
Tipo de actividades:	EV final

Cuadro 6.22: Desarrollo de la sesión 10: Resolución de la prueba individual. Exposición del trabajo grupal. (Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 10: Resolución de la prueba individual. Exposición del trabajo grupal	
Desarrollo de la sesión:	En esta sesión, el profesor corregirá la prueba individual en la pizarra (25') En la segunda parte de la sesión, el alumnado, expondrá por grupos, sus conclusiones del trabajo. Cada grupo de 4 alumnos dispondrá de 7 min para explicar la modelización que han hecho, así como las dificultades con las que se han encontrado. (35')
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 PMAM: 12.1, 12.2, 12.3
Competencias clave:	CCL, CEC
Metodología:	Metodología interactiva en la que el profesor tiene constante interacción con los alumnos, debatiendo con los alumnos la soluciones del examen. Posteriormente, se hará uso de estrategias metodológicas activas y motivadoras, en la que la exposición grupal pasará a primer plano, siendo un elemento evaluador y motivacional.
Tipo de actividades:	CON, MOT, EV.

6 Proyección didáctica

Cuadro 6.23: Desarrollo de la sesión 11: Actividades de ampliación y recuperación. (Elaboración propia)

Desarrollo de la sesión 11: Actividades de ampliación y recuperación	
Desarrollo de la sesión:	La última sesión se utilizará para recuperar conceptos a aquellos que hayan no hayan superado la prueba escrita y a ampliar información a aquellos que si lo hicieran. Por un lado, se propondrá una prueba escrita individualizada con ejercicios sobre los contenidos que hayan planteado problemas para la recuperación de la unidad. Por otro lado, los alumnos que superaron los conocimientos de la unidad tendrán que realizar una actividad propuesta por el profesor de
Estándares de aprendizaje:	Geometría: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 PMAM: 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 5.1, 6.3, 8.2, 9.1
Competencias clave:	SIEP, CAA, CCL, CD, CMCT
Metodología:	Metodología autónoma para el alumnado que realiza el examen de recuperación; Metodología activa que el alumnado aprobado; reflexiva y motivadora con la actividad de ampliación
Tipo de actividades:	AMP, REF, REC, EV

7 Conclusiones

Durante este Trabajo Fin de Máster hemos tratado de sintetizar la experiencia adquirida durante la realización de este Máster, tanto con las asignaturas didácticas, como con las que se enfocaban a la especialidad de Matemáticas. Además, se han podido integrar en este documento los aprendizajes adquiridos durante el periodo de prácticas.

En primer lugar, el desarrollo de una fundamentación curricular, epistemológica y didáctica han construido la base de conocimientos necesarios para trazar una estrategia didáctica para la realización de una programación contextualizada en la que se han conectado las dificultades de aprendizaje de la materia, cuáles son las principales metodologías que ayudan a solventar estos inconvenientes y por último, qué herramientas y recursos se van a usar. Cabe mencionar que, para el desarrollo de la programación didáctica, hemos tenido en cuenta los requisitos del sistema educativo actual, adaptándonos al contexto social y teniendo en cuenta necesidades académicas del alumnado.

Añadido al desarrollo del trabajo, se ha sumado la experiencia vivida durante el transcurso de las prácticas en el instituto, que han integrado una visión más realista a la experiencia. Este periodo, nos ha hecho vivir desde un punto de vista más cercano cuáles son las verdaderas dificultades de aprendizaje y los problemas reales que se dan en el aula; falta de base, falta de motivación y/o concentración... .

De forma que, la indagación y estudio de la innovación educativa nos ha permitido conocer las soluciones que la literatura científica aporta y nos ha proporcionado una herramienta para hacer frente a los futuros problemas que surjan en el aula. Particularizando a nuestro caso, el uso de Metodología ABP junto con programas de geometría dinámica como Geogebra, sumadas a otras metodologías activas como el uso de la clase invertida o el uso de metodologías gamificadas y/o colaborativas, puede conducir a resultados positivos según los diferentes estudios que hemos analizado. Se ha demostrado que la implicación del profesorado para una correcta labor docente es crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, la metodología ABP ha sido una herramienta que nos proporciona la capacidad de mejorar la autonomía y responsabilidad en el alumnado en su propio aprendizaje, ya que pueden aplicar el uso de los diferentes conocimientos y habilidades que han adquirido.

A modo de conclusión, este trabajo nos ha hecho darnos cuenta que el proceso de enseñanza-aprendizaje no debe encomendarse a modelos tradicionales o inmóviles, sino que el docente debe estar en continua adaptación, preparando el contenido de las sesiones, adecuándose a las metodología más conveniente en cada caso, con el objetivo de lograr un clima adecuado de convivencia y de motivación del alumnado para conseguir una correcta gestión del tiempo en el aula y alcanzar los objetivos académicos establecidos por la legislación. Está claro que es un reto a alcanzar, en la que los principales protagonistas seremos nosotros, los futuros docentes.

8 Bibliografía

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9.

Avecilla, F. B., Cárdenas, O. B., Barahona, B. V., & Ponce, B. H. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica-ESPOL*, 28(5).

Barron, B. J., Schwartz, D. L., Vye, N. J., Moore, A., Petrosino, A., Zech, L., & Bransford, J. D. (1998). Doing with understanding: Lessons from research on problem-and project-based learning. *Journal of the learning sciences*, 7(3-4), 271-311.

Bello Rojas, R. R. (2020). Introducción del GeoGebra en el proceso de enseñanza–aprendizaje de Geometría a docentes en formación. *RECIE. Revista Caribeña de Investigación Educativa*, 4(1), 124-134.

Castellet, M., & Llerena, I. (1991). *Álgebra lineal y geometría*. Reverté.

Figueroa Zapata, L. A., Ospina García, M. S., & Tuberquia Tabera, J. (2019). Inclusive educational practices from universal design for learning and individual plan of reasonable adjustment.

Flecha, A., García, R., Gómez, A., & Latorre, A. (2009). Participación en escuelas de éxito: una investigación comunicativa del proyecto Includ-ed. *Cultura y educación*, 21(2), 183-196

Flores Compañ, M. J., Bellés Agut, D., Nebot Romero, V., & Rubio Tintoré, D. (2019). Nuevas tecnologías y aprendizaje basado en proyectos aplicado a la Geometría. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*.

Flores-Fuentes, G., & Juárez-Ruiz, E. D. L. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en Bachillerato. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19(3), 71-91.

Galeana, L. (2006). Aprendizaje basado en proyectos. *Revista Ceupromed*, 1(27), 1-17.

Galvis, L. J. (2010). *Estudio de la geometría del espacio mediante la metodología enseñanza y aprendizaje por proyectos*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

8 Bibliografía

- González, J., y Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe*. Informe final fase uno. Bilbao: Universidad de Deusto.
- Krajcik, J., Blumenfeld, P. C., Marx, R. W., Bass, K. M., Fredricks, J., & Soloway, E. (1998). Inquiry in project-based science classrooms: Initial attempts by middle school students. *Journal of the Learning Sciences*, 7(3-4), 313-350.
- Kokotsaki, D., Menzies, V., & Wiggins, A. (2016). Project-based learning: A review of the literature. *Improving schools*, 19(3), 267-277.
- Lehmann, C. H., Díaz, R. G., & Sors, M. S. (1959). *Geometría analítica* (No. 516 L5283g Ej. 1). Uteha.
- Luengo González, R., Sánchez Pesquero, C., Casas García, L. M., Márquez Zurita, L., Blanco Nieto, L. J., & Mendoza García, M. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis, 1990.
- Maure, L. M., & Marimón, O. G. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado. *Números*, 90.
- Pérez, H. J., & Vásquez, S. K. R. (2015). Desarrollo de software: una experiencia de Aprendizaje basado en proyectos. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo ISSN: 2007-2619*, (10).
- Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En Bolea, P.; Camacho, M. y Flores, P. (eds). *Investigación en Educación Matemática. Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Tenerife: Universidad de La Laguna, pp. 295-305
- Sabaté, J. G., & García, M. V. (2012). Hablando sobre aprendizaje basado en proyectos con Júlia. REDU. *Revista de Docencia Universitaria*, 10(3), 125-151.
- Sánchez, J. (2013). Qué dicen los estudios sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos. *Actualidad pedagógica*, 1(4).
- Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.

9 Anexos

Anexo 1: Actividad de Modelización geométrica.

En este anexo, se presenta el desarrollo de la actividad de modelización geométrica dentro de la clase de Matemáticas II basada en la metodología ABP.

Objetivos matemáticos

El objetivo de esta lección es evaluar la capacidad de los estudiantes de utilizar las herramientas matemáticas para modelar y resolver un problema en un contexto del mundo real. En particular, esta unidad tiene como objetivo identificar y ayudar a los estudiantes que tienen dificultades en la interpretación geométrica de la unidad «*Propiedades métricas*» del Bloque IV de Geometría en Matemáticas II.

Introducción

En la primera sesión, se formarán los grupos para la realización de la práctica. Además, se definirán los objetivos a conseguir y se entregará a los estudiantes una copia de la tarea a realizar. Después de una breve introducción, los estudiantes trabajarán en colaboración en pequeños grupos realizando la tarea. Su objetivo será modelar y resolver un problema en un contexto del mundo real. Para ello deberán realizar mediciones y definir correctamente las herramientas matemáticas.

Materiales necesarios

- Cada alumno necesitará una copia de la tarea a realizar
- Elementos para medición y dibujo: Metro, regla, compás, escuadra y cartabón
- Calculadora
- Herramientas TIC: Geogebra, Editor de texto, Editor de presentaciones

Tiempo necesario

Sesión 1: Sesión introductoria de la tarea. (30')

Sesión 2 - Sesión 9: Realizar mediciones y resolver dudas con el profesor (5')

Sesión 10: Exposición trabajo grupal (35')

Modelización y realización de la tarea se realizará en horario no-lectivo.

Plan de clase

Fase de inicio e introducción de la tarea.

El profesor introduce la tarea proporcionando a cada estudiante una copia del enunciado de la tarea. A continuación expone el objetivo de la clase:

En la clase de hoy, vamos a introducir un trabajo de modelización geométrica para realizar a lo largo de la unidad didáctica de Propiedades métricas. El objetivo será modelizar y obtener información métrica sobre algunos objetos que se encuentren dentro de la habitación donde nos encontramos. Se trata de un problema abierto en el que la creatividad es esencial y en el que no todos tendréis que obtener la misma solución, si no que tenéis que elegir algún caso en concreto y estudiarlo a fondo. Hay diferentes formas de abordar el problema y veréis que llegaremos a resultados dispares. El objetivo es buscar peculiaridades y resultados interesantes que os llamen la atención.

El profesor lee el enunciado de la tarea en voz alta para que los alumnos.

Actividad de modelización «Geometría métrica en el aula».

El objetivo de la tarea es modelizar desde el punto de vista geométrico algunos objetos que se encuentren en la clase de matemáticas y utilizar dicha modelización para resolver algún problema métrico entre ellos (Distancia, ángulo, volumen...). A la hora de elegir los objetos a que se quieran estudiar es importante que puedan modelizarse de algún modo con alguna herramienta geométrica que se están estudiando en la unidad desarrollada.

1. Justificación de los objetos elegidos para la modelización.

En este apartado, algunas de las preguntas que podemos responder serán las siguientes:

- ¿Por qué se han elegido estos objetos?
- ¿Que características tienen?
- ¿Se asemejan de alguna forma a algún elemento matemático? ¿Se puede modelar este objeto matemáticamente?

2. Problema métrico planteado

En este apartado se debe especificar que problema métrico se quiere resolver. Para ello, es necesario especificar que procedimiento métrico se va a utilizar

3. Modelización. Medidas y representación gráfica del problema.

En este apartado se debe especificar que problema métrico se quiere resolver. Se incluirán además las medidas realizadas para definir los elementos a estudiar, así como la representación gráfica del problema.

4. Resultados

Resolución del problema métrico planteado

5. Conclusión

Nota: Geogebra puede ser usado para representar tu modelización. Además puede ser interesante verificar los resultados obtenidos utilizando la justificación gráfica y comparan con los resultados obtenidos de forma algebraica.

Una vez terminado de explicar el objetivo de la tarea, el profesor resolverá las dudas que tengan los alumnos. Además hará algunas preguntas a modo de guía para que los alumnos comprendan el objetivo de la tarea:

- ¿Qué puedo modelizar como una recta? ¿Y como un plano? ¿O un vector?
- ¿Es necesario definir un sistema de coordenadas?

Estas pueden ser algunas de las preguntas que tendréis que haceros para empezar la tarea y es esencial que penséis en las limitaciones que tiene asignar un objeto matemático a un objeto real.

Por ejemplo, ¿es posible definir la superficie de una mesa como un plano? ¿Está la superficie de la mesa perfectamente definida con un plano? ¿La superficie de la mesa es infinita?

Pide a los alumnos que se agrupen y hablen sobre el tipo de problema métrico que quieren plantear. Tras varios minutos de diálogo, dirígete a los grupos para que te cuenten su idea. Si están muy dispersos, puedes intentar darle alguna idea:

- ¿Habéis pensado en como se podría calcular el ángulo entre dos superficies que se encuentren muy lejanas?
- ¿O la distancia entre dos rectas?

Ejemplo de problema métrico adaptado a la clase

NOTA: Este breve ejemplo no se compartirá con los alumnos. La idea motivar es la creatividad y no influenciar en el tipo de problema que eligen.

El objetivo en este ejemplo es calcular la distancia que existe entre la recta que contiene la arista superior de la puerta de la clase y la recta que contiene uno de los lados de la mesa del profesor.

Se define un sistema de coordenadas situado en el vértice inferior izquierdo de la habitación y cuyos ejes X Y y Z no son más que las aristas que confluyen a ese vértice. Además definimos las siguientes rectas y puntos

- s : Recta que contiene la arista superior de la puerta de la clase.
- r : Recta que contiene uno de los lados de la mesa del profesor.
- Punto Q : vértice 1 la arista superior de la puerta
- Punto Q' : vértice 2 la arista superior de la puerta
- Punto P : vértice 1 de la arista de uno de los lados de la mesa del profesor
- Punto P' : vértice 2 de la arista de uno de los lados de la mesa del profesor

Para determinar los valores de estas definiciones, se utiliza el sistema de coordenadas definido y se miden los valores correspondiente de cada uno de los ejes con ayuda de un metro

- $P = (5.98, 5.1, 2) m$
- $P' = (6.5, 4.9, 2) m$
- $Q = (1, 2.5, 1.25) m$
- $Q' = (1, 8, 2, 5, 1.25) m$

y definimos los vectores \vec{u} y \vec{v} como:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PP'} = (P'_x - P_x, P'_y - P_y, P'_z - P_z) = (-0.48, 0.2, 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QQ'} = (Q'_x - Q_x, Q'_y - Q_y, Q'_z - Q_z) = (0.8, 0, 0)$$

$$PQ = (P'_x - Q_x, P'_y - Q_y, P'_z - Q_z) = (-4.98, -2.6, -0.75)$$

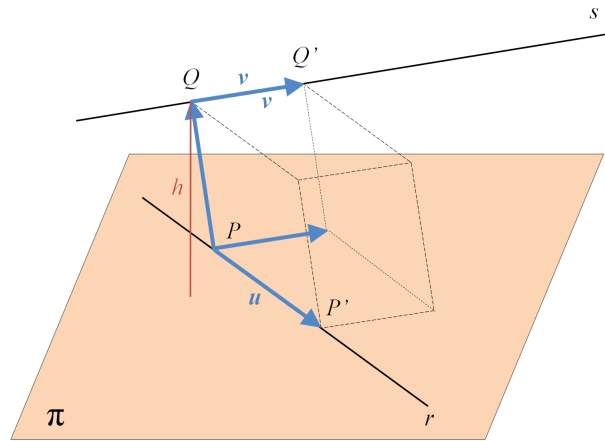


Figura 9.1: Método del producto mixto para cálculo de dos rectas que se cruzan. (Elaboración propia)

El volumen del paralelepípedo de la figura 9.1 viene terminado por $\left| [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \right|$. El área de su base es $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Su altura h es la distancia de Q a π , es decir la distancia de r a s que viene dada por el método del producto mixto.

$$dist(r, s) = dist(Q, \pi) = h = \frac{Vol. \text{ paralelepípedo}}{\text{Área base}} = \frac{\left| [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Sustituyendo los valores obtenemos

$$\left| [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \right| = 0,12$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 0,16$$

Por tanto,

$$dist(r, s) = \frac{0,12}{0,16} = 0,75m$$

Con lo cual la distancia que existe entre la recta que contiene la arista superior de la puerta de la clase y la recta que contiene uno de los lados de la mesa del profesor es de 75 centímetros. Se incluye además en la figura 9.2 la representación del problema métrico con Geogebra así como la comprobación del resultado.

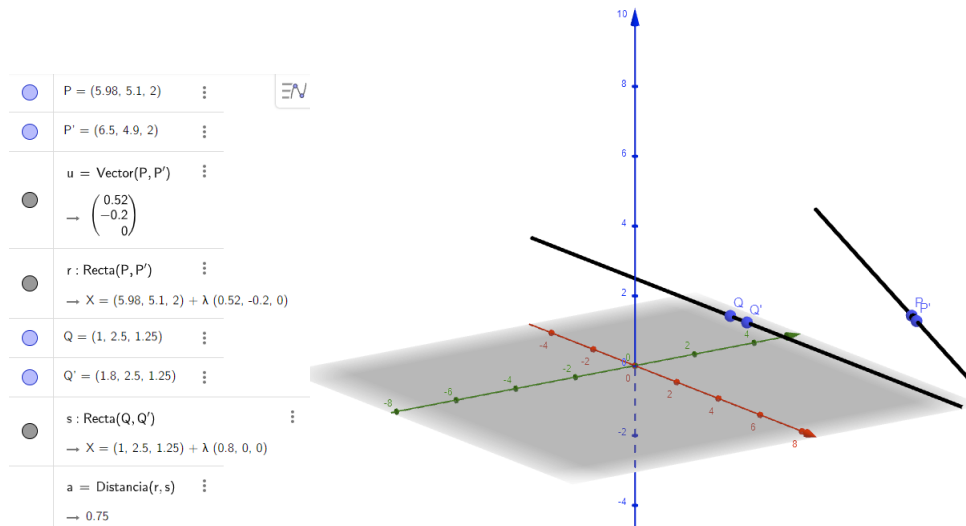


Figura 9.2: Representación rectas r y s usando Geogebra. Comprobación distancia entre rectas. (Elaboración propia)

Fase de debate y discusión

En última sesión, el alumnado, expondrá por grupos, sus conclusiones del trabajo. Cada grupo de 4 alumnos dispondrá de 7 min para explicar la modelización que han hecho, así como las dificultades con las que se han encontrado.

Conforme cada grupo de alumnos termine de exponer, pide al resto de alumnos que piensen en I Van den Berg, Mortemans, Spooren, Van Petegem, Gijbels, & Vanthournout (2006) los resultados presentados e incluso si se podría mejorar el método que han usado los compañeros. Si algún grupo llega a un resultado incorrecto o el procedimiento no es el adecuado, se dejará en la pizarra para valorarlo en la fase de discusión y intentar resolver correctamente el problema entre el resto de compañeros

Anexo 2: Rúbricas de evaluación

En este Anexo, se incluyen las diferentes rúbricas para la evaluación de la unidad didáctica:

- Rúbrica evaluativa del trabajo grupal
- Rúbrica evaluativa del examen escrito
- Rúbrica evaluativa de la participación en clase
- Rúbrica evaluativa de las actividades propuestas

Cuadro 9.1: Rúbrica evaluativa del trabajo grupal. (Elaboración propia)

Evaluación	Excelente (9-10)	Notable (7-8)	Suficiente (5-6)	Insuficiente (1-4)	Ponderación	Valoración
Presentación	El trabajo incluye todos los elementos de presentación establecidos	El trabajo incluye casi todos los elementos de presentación establecidos	El trabajo respeta bastantes elementos de presentación establecidos	El trabajo respeta poco los elementos de presentación establecidos	10%	
Lenguaje matemático	El trabajo respeta y utiliza correctamente el lenguaje matemático	El trabajo respeta y utiliza casi siempre el lenguaje matemático	El trabajo respeta y utiliza el lenguaje matemático a veces.	El trabajo no respeta y utiliza correctamente el lenguaje matemático	10%	
Originalidad y creatividad	El tema elegido es bastante original y creativo	El tema elegido es original y creativo	El tema elegido es común.	No hay originalidad en la elección del tema	30%	
Contenido	Demuestra un gran conocimiento ajustándose a los contenidos de la unidad	Demuestra un buen conocimiento ajustándose a los contenidos de la unidad	Demuestra un conocimiento parcial de los contenidos de la unidad	Demuestra poco conocimiento de los contenidos de la unidad	40%	
Uso de herramientas TIC	Ha usado y se desenvuelve perfectamente con las herramientas TIC	Ha usado y se desenvuelve correctamente con las herramientas TIC	Ha usado y se desenvuelve parcialmente con las herramientas TIC	Ha usado y se desenvuelve poco con las herramientas TIC	10%	
VALORACIÓN FINAL						

Cuadro 9.2: Rúbrica evaluativa del examen escrito. (Elaboración propia)

Evaluación	Excelente (9-10)	Notable (7-8)	Suficiente (5-6)	Insuficiente (1-4)	Ponderación	Valoración
Resolución de los problemas	La suma de los puntos obtenidos en el examen es excelente (Entre 9 y 10)	La suma de los puntos obtenidos en el examen es notable (Entre 7 y 9)	La suma de los puntos obtenidos en el examen es suficiente (Entre 5 y 6)	La suma de los puntos obtenidos en el examen es insuficiente (Entre 1 y 4)	95%	
Estructura, claridad y uso del lenguaje matemático	El trabajo respeta la estructura, es claro y utiliza correctamente el lenguaje matemático perfectamente	El trabajo respeta la estructura, es claro y utiliza correctamente el lenguaje matemático casi siempre	El trabajo respeta la estructura, es claro y utiliza correctamente el lenguaje matemático parcialmente	El trabajo no respeta la estructura, ni es claro y no utiliza correctamente el lenguaje matemático.	5%	
VALORACIÓN FINAL						

Cuadro 9.3: Rúbrica evaluativa de las actividades propuestas (Elaboración propia)

Evaluación	Excelente (9-10)	Notable (7-8)	Suficiente (5-6)	Insuficiente (1-4)	Ponderación	Valoración
Interés y participación	El alumno ha realizado todas las actividades propuestas	El alumno ha realizado casi todas las actividades propuestas	El alumno ha realizado la mitad de las actividades propuestas	El alumno ha realizado pocas actividades propuestas	20%	
Corrección de las actividades	El alumno ha realizado todas las actividades correctamente	El alumno ha realizado casi todas las actividades correctamente	El alumno ha realizado la mitad de las actividades correctamente	El alumno ha realizado pocas actividades correctamente	80%	
VALORACIÓN FINAL						

Cuadro 9.4: Rúbrica evaluativa de la participación en clase. (Elaboración propia)

Evaluación	Excelente (9-10)	Notable (7-8)	Suficiente (5-6)	Insuficiente (1-4)	Ponderación	Valoración
Iniciativa	El alumno siempre tiene iniciativa para realizar las actividades	El alumno casi siempre tiene iniciativa para realizar las actividades	El alumno a veces tiene iniciativa para realizar las actividades	El alumno casi nunca tiene iniciativa para realizar las actividades	20%	
Interés y compañerismo	El alumno muestra interés en clase, preguntando dudas y ayudando a los demás.	El alumno muestra interés normalmente en clase, preguntando dudas y ayudando a los demás.	El alumno a veces muestra interés en clase, preguntando dudas y ayudando a los demás.	El alumno casi nunca muestra interés en clase, sin preguntar ni ayudar a sus compañeros	20%	
Asistencia	El alumno ha asistido a todas las clases de la unidad	El alumno ha asistido al 80% las clases de la unidad	El alumno ha asistido al 60% las clases de la unidad	El alumno ha asistido al menos del 50% de las unidades	20%	
Participación	El alumno siempre está dispuesto a participar en clase	El alumno casi siempre está dispuesto a participar en clase	El alumno está dispuesto a participar en clase a veces	El alumno no está dispuesto a participar en clase	20%	
Realización	El alumno realiza las actividades correctamente según los criterios establecidos	El alumno realiza las actividades casi siempre correctamente según los criterios establecidos	El alumno realiza las actividades con algunos errores según los criterios establecidos	El alumno realiza las actividades incorrectamente según los criterios establecidos	20%	
VALORACIÓN FINAL						