Centro de Estudios de Postgrado

Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

UNIVERSIDAD DE JAÉN
Centro de Estudios de Postgrado

Trabajo Fin de Máster

TEOREMA DE PITÁGORAS EN 2º DE ESO

Alumno/a: Arjona Martínez, Felipe

Tutor/a: Prof. D. Pedro Garrancho García
Dpto: Matemática Aplicada

Cotutor/a: Prof. Dña. Clara Arbizu Barrena
Dpto: Didáctica de las Matemáticas

Junio, 2020

TEOREMA DE PITÁGORAS EN 2º DE ESO

Alumno/a: Arjona Martínez, Felipe

Tutor/a: Prof. D. Pedro Garrancho García
Dpto: Matemática Aplicada

Cotutor/a: Prof. Dña. Clara Arbizu Barrena
Dpto: Didáctica de las Matemáticas

Jaén, junio de 2020

EL ALUMNO:	EL TUTOR:	LA COTUTORA:
	GARRANCHO GARCIA PEDRO - 25995716N Firmado digitalmente por GARRANCHO GARCIA PEDRO - 25995716N Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=IDCES-25995716N, givenName=PEDRO, sn=GARRANCHO GARCIA, cn=GARRANCHO GARCIA PEDRO - 25995716N Fecha: 2020.06.17 11:17:45 +02'00'	Clara Arbizu
Fdo.: Felipe Arjona Martínez	Fdo.: Dr. Pedro Garrancho García	Fdo.: Dra. Clara Arbizu Barrena

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) supone el colofón al Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de Idiomas. En él se buscan diversos recursos relacionados con la docencia de las matemáticas y se aplican los conocimientos adquiridos a lo largo del máster para elaborar una unidad didáctica.

El principal contenido de dicha unidad didáctica es el Teorema de Pitágoras, el cual se ubica en el 2º curso de la ESO. La elección de este curso se debe al conocimiento previo de que las prácticas docentes se harán con un grupo de alumnos de dicho nivel escolar. La elección del Teorema de Pitágoras como principal contenido de la unidad didáctica ha sido motivada por la creencia de que dicha temática se vería con los alumnos en el periodo de prácticas.

En primer lugar, este TFM presenta una fundamentación curricular, una fundamentación epistemológica y una fundamentación didáctica, las cuales se introducen a continuación:

- Fundamentación curricular. En ella se analizan los documentos oficiales de ámbito nacional y autonómico vigentes en los que aparecen los contenidos de la asignatura de Matemáticas de 2º de ESO trabajados en la unidad didáctica. En segundo lugar, se realiza un análisis de la presentación de dichos contenidos reflejada en dos libros de texto (*Marea Verde* (Salvador et al., 2014) y *CIDEAD* (Barrios et al., 2009)).

- Fundamentación epistemológica. Se basa en la elaboración de parte de un tema del temario oficial de oposiciones, en concreto del tema 39 de *Geometría del triángulo.* Dicho tema es el que más relación tiene con los contenidos matemáticos de la unidad didáctica que se elabora en este TFM.

- Fundamentación didáctica. Se identifican dos investigaciones relacionadas con la didáctica del Teorema de Pitágoras y se explican brevemente. Las conclusiones extraídas de ellas se han tenido en cuenta para la elaboración de la unidad didáctica.

Posteriormente, tomando como referencia los recursos asociados a la fundamentación curricular, fundamentación epistemológica y fundamentación didáctica, se elabora una unidad didáctica. Ésta será lo más realista posible y con toda la intención de que puede ser llevada a la práctica en un aula de 2º de ESO. Además, se llevan a cabo diversas adaptaciones curriculares para tener en cuenta la diversidad del alumnado presente en las aulas.

En resumen, con las competencias adquiridas durante el Máster de Secundaria se elabora el presente TFM en el que, a partir de una fundamentación curricular, epistemológica y didáctica, se elabora una unidad didáctica que tiene como motivación el poder ser aplicada en un aula de 2º de ESO.

2. OBJETIVOS.

A continuación se presentan los objetivos que se persiguen con la realización del presente Trabajo Fin de Máster. Dichos objetivos tienen relación con la formación adquirida como futuro profesor de matemáticas.

Están asociados con el Apartado 3 del Anexo de la *Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas* (Orden, 2007), así como con algunas de las competencias y resultados de aprendizaje de la Guía Docente del Trabajo Fin de Máster.

Dichos objetivos son:

- Conocer los desarrollos teórico-prácticos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Buscar, obtener y comunicar información, transformarla en conocimiento y ponerla en práctica en los procedimientos de enseñanza y aprendizaje en la materia de matemáticas.
- Conocer la historia de la materia de matemáticas y adquirir la formación necesaria para poder transmitir una visión dinámica de la misma.
- Conocer el valor formativo y cultural de la asignatura de matemáticas.
- Adquirir el conocimiento requerido para el uso de las TICs en el aula.
- Aplicar los conocimientos en comunicación audiovisual y multimedia en el aula.
- Conocer el currículo de la asignatura de matemáticas.
- Crear, a partir de los currículos, programas de actividades.
- Tener una primera toma de contacto con la planificación en el proceso de enseñanza de la asignatura de matemáticas.
- Participar en la creación del currículo que se vaya a aplicar en un determinado centro escolar.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la

adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

- Adquirir las destrezas que permitan aplicar propuestas docentes innovadoras.
- Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.
- Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
- Conocer estrategias y técnicas de evaluación.
- Crear y poner en práctica metodologías didácticas, en grupo e individuales, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
- Planificar alternativas de aprendizaje centradas en el alumnado con necesidades especiales.
- Entender y valorar la diversidad de los discentes.
- Adquirir las habilidades y destrezas necesarias para seguir aprendiendo de un modo autónomo.

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.

Esta fundamentación curricular se dividirá en dos partes. En primer lugar, se analizarán los documentos oficiales de ámbito nacional y autonómico vigentes en los que aparecen los contenidos de la asignatura de Matemáticas de 2º de ESO trabajados en la unidad didáctica.

En segundo lugar se realizará un análisis de la presentación de dichos contenidos reflejada en dos libros de texto. Uno de ellos será un libro digital de difusión gratuita fruto de un proyecto altruista (*Marea Verde*) (Salvador et al., 2014) cuya página web es www.apuntesmareaverde.org.es. El otro es un libro (Barrios et al., 2009) del *CIDEAD* (Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia), que depende del Ministerio de Educación y Formación Profesional. El *CIDEAD* se encarga de brindar atención educativa secundaria a distancia a adultos que viven en el extranjero o en el territorio nacional sin posibilidad de asistir a los centros de educación presencial.

3.1. Análisis del currículo escolar.

En primer lugar, los contenidos de cada curso de secundaria y, en concreto, del que resulta de interés para este Trabajo Fin de Máster que es 2º ESO, aparecen en la *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016).

Cabe destacar que esta Orden recomienda la implementación de metodologías asociadas a juegos matemáticos; el uso de calculadoras y softwares; el aspecto histórico, social y cultural de las matemáticas; el uso de internet y vídeos sobre la vida y obra de personajes matemáticos; la manipulación y los recursos digitales interactivos.

Según dicha Orden, los contenidos de la materia de Matemáticas en el curso de 2º de ESO se estructuran en los siguientes bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números y Álgebra.
- Bloque 3. Geometría.
- Bloque 4. Funciones.
- Bloque 5. Estadística y probabilidad.

En la unidad didáctica de este Trabajo Fin de Máster se contemplan los contenidos asociados al Teorema de Pitágoras, los cuales se ubican en el bloque 3 de Geometría.

Según dicho bloque, en primer lugar se estudian los triángulos rectángulos y el Teorema de Pitágoras junto con su justificación geométrica y sus aplicaciones. Posteriormente, el currículo contempla en este bloque los siguientes contenidos:

- Poliedros y cuerpos de revolución.
- Áreas y volúmenes.
- Longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
- Semejanza.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

La Orden anteriormente mencionada también establece los criterios de evaluación asociados a los contenidos. De entre ellos, se destaca el siguiente, el cual ha de tenerse en cuenta para la unidad didáctica de este Trabajo Fin de Máster:

3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. CMCT, CAA, SIEP, CEC.

Por otro lado, el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Real Decreto, 2014), refleja en una misma tabla los contenidos del bloque 3 de Geometría de los cursos de 1º y 2º de ESO. Además, también establece los estándares de aprendizaje evaluables asociados al anterior criterio de evaluación, los cuales son:

3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

3.2. Análisis de los libros de texto.

A continuación se procederá a realizar una comparación entre la forma de presentar los contenidos y las actividad propuestas de los dos libros anteriormente comentados. Recuérdese los dos libros a analizar, por un lado un libro digital de difusión gratuita fruto de un proyecto altruista (*Marea Verde*) (Salvador et al., 2014) y por otro un libro del *CIDEAD* (Barrios et al., 2009).

EXPLICACIÓN DE LA TEORÍA

En cuanto a la forma de explicar la teoría, ambos libros, tanto el de *Marea Verde* (Salvador et al., 2014) como el de *CIDEAD* (Barrios et al., 2009), lo hacen de una manera casi idéntica. Ambos reflejan los contenidos que establece el currículo: triángulos rectángulos, Teorema de Pitágoras, justificación geométrica y aplicaciones (las cuales se dan en los ejercicios).

Ambos libros eliminan la posibilidad de que exista un conflicto semiótico en el estudiante a la hora de que éste identifique un triángulo rectángulo, ya que lo presentan en diferentes orientaciones. Recuérdese que un conflicto semiótico es una asociación errónea de significado que se da normalmente cuando se definen conceptos de geometría de forma gráfica. Por ejemplo, a unos alumnos se les puede mostrar gráficamente qué es un triángulo rectángulo. Sin embargo, debido a un conflicto semiótico, si posteriormente dicho triángulo rectángulo se les presenta con una orientación distinta, los estudiantes ya no son capaces de identificarlo como tal. Es muy interesante el uso del software *GeoGebra* para eliminar este tipo de confusiones entre los alumnos.

La teoría se apoya con un ejemplo en los dos libros y se combina el lenguaje escrito con el matemático de forma conveniente. Las figuras usadas no se presentan numeradas ni etiquetadas, lo que en algún momento puede llevar a confusión por no saber de qué figura concretamente se está hablando.

Los contenidos más importantes se recuadran en ambos libros y se usa la letra negrita para los conceptos fundamentales.

En los dos casos se refleja la justificación geométrica del Teorema de Pitágoras mediante áreas de cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo. De igual forma se realiza la misma demostración, la demostración geométrica que aparece en el apartado 6.8.2 (figura 24).

Por último, la *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016), recomienda estudiar los aspectos históricos de los contenidos matemáticos tratados. Sin embargo, ninguno de los dos libros hace ninguna referencia a este aspecto.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ambos libros presentan ejercicios resueltos, pero las diferencias entre ellos son las siguientes:

- Libro de *Marea Verde* (Salvador et al., 2014). Presenta un solo ejercicio resuelto de aplicación directa del Teorema de Pitágoras en el que hay que hallar un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos. No se adapta el problema a elementos de la vida cotidiana del alumno.
- Libro de *CIDEAD* (Barrios et al., 2009). Presenta varios ejercicios resueltos que pueden agruparse de la siguiente manera:
    - Dibujar un segmento que mida $\sqrt{2}$. Para ello hay que dibujar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, de forma que la hipotenusa es el segmento pedido.
    - Problemas sin aplicación a la vida real de cálculo de diagonales, alturas y apotemas de polígonos regulares y figuras planas.
    - Problemas con aplicación a la vida real de cálculo de áreas, diagonales, alturas y apotemas de polígonos regulares y figuras planas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ambos libros presentan ejercicios propuestos con las siguientes diferencias entre ellos:

- Libro de *Marea Verde* (Salvador et al., 2014). Presenta muy pocos ejercicios, solo nueve, los cuales pueden dividirse en:
    - Cálculo de un lado del triángulo rectángulo conocidos los otros dos.
    - Cálculo de áreas de polígonos regulares mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.
    - Cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado y de un rectángulo.

  Cabe destacar que el criterio de evaluación asociado a estos contenidos según el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Real Decreto, 2014), establece reconocer el significado aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras. Así, este libro establece un ejercicio propuesto de ternas pitagóricas asociado al significado aritmético, de forma que no solo se trabaja el significado geométrico.

- Libro de *CIDEAD* (Barrios et al., 2009). Presenta muchos más ejercicios que el libro de *Marea Verde* (Salvador et al., 2014). Son problemas sin y con aplicación de la vida real del Teorema de Pitágoras en polígonos regulares y figuras planas. En este caso también hay un ejercicio en el que se trabaja con una terna que el estudiante tendrá que descubrir si es pitagórica o no. De esta forma se trabaja el significado aritmético del Teorema de Pitágoras.

ASPECTOS A DESTACAR

Por último, el libro de *CIDEAD* (Barrios et al., 2009) consta de ciertos aspectos a destacar de los que carece el libro de *Marea Verde* (Salvador et al., 2014). Dichos aspectos son:

- Apartado de *Recuerda lo más importante* en el que se resume la teoría y la justificación geométrica del Teorema de Pitágoras.
- Soluciones numéricas de los ejercicios y problemas propuestos.

4 FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

La geometría es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras del plano o el espacio, tales como puntos, rectas, planos, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.

La geometría es la fundamentación teórica de la geometría descriptiva (representación del espacio tridimensional en una superficie) o el dibujo técnico. Además, es la base que subyace en instrumentos como el compás, el pantógrafo, el teodolito o el sistema de posicionamiento global (GPS). En este último se combina la geometría con ecuaciones diferenciales y el análisis matemático.

Esta rama de las matemáticas nació para dar solución a problemas referentes a medidas. De ahí su etimología: *geos* significa *tierra* y *metría* significa *medida* (*Medida de la tierra*). Hoy en día podemos hallar geometría en astronomía, náutica, topografía, geografía, balística, mecánica, física aplicada, arquitectura o artesanía.

A continuación se estudia la parte de la geometría referente al triángulo. Cabe por último destacar que esta fundamentación epistemológica está basada en Boyer y Merzbach (2011), Puig (1986), Rey y Puig (1933) y Whitworth et al. (1866).

4.1 Generalidades.

4.1.1 Conceptos elementales.

Se definen a continuación los conceptos más elementales asociados a la geometría del triángulo.

DEFINICIÓN. Triángulo. Un triángulo es la figura del plano que está formada por tres segmentos rectilíneos que poseen, dos a dos, un extremo común.

Además, existen otras definiciones de triángulo que son equivalentes.

DEFINICIÓN. Triángulo. Un triángulo es la figura del plano que resulta de una poligonal cerrada de tres lados.

DEFINICIÓN. Triángulo. Un triángulo es un polígono convexo de tres lados y tres ángulos.

En un triángulo se diferencia entre ángulos internos y externos:

- Ángulos internos. Son los ángulos convexos formados por cada dos lados. Un ángulo convexo es aquel formado entre dos semirrectas que comparten el mismo vértice y cuya amplitud se encuentra entre $0°$ y $180°$.
- Ángulos externos. Son los ángulos cóncavos asociados a los ángulos internos, es decir, sus ángulos adyacentes. Un ángulo cóncavo es

aquel formado entre dos semirrectas que comparten el mismo vértice y cuya amplitud se encuentra entre $180°$ y $360°$.

La notación referente a los ángulos y los lados aparece en la siguiente figura 1.

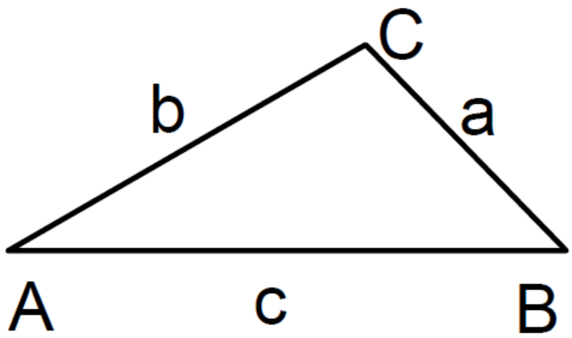


Figura 1

Como se puede apreciar, los lados del triángulo se denotan con letras minúsculas y los ángulos con mayúsculas. Cada ángulo tiene la misma letra que su lado opuesto.

DEFINICIÓN. Perímetro. El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados.

4.1.2 *Clases de triángulos.*

Los triángulos pueden clasificarse según sus lados o según sus ángulos.

Según sus lados se tiene:

- Triángulo equilátero. Sus tres lados tienen igual longitud (figura 2).
- Triángulo isósceles. Dos de sus lados tienen igual longitud (figura 3).
- Triángulo escaleno. Todos los lados tienen distinta longitud (figura 4).

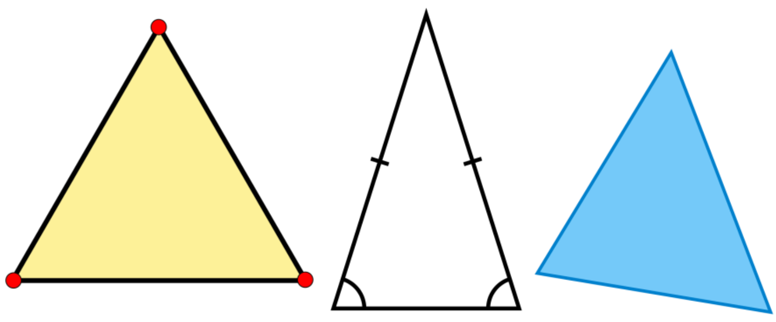


Figura 2 *Figura 3* *Figura 4*

Por su parte, según sus ángulos se puede diferenciar entre:

- Triángulo rectángulo. Tienen un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90° (figura 5).
- Triángulo obtusángulo. Tienen un ángulo obtuso, es decir, un ángulo mayor de 90°. (figura 6).
- Triángulo acutángulo. Tienen los tres ángulos agudos, es decir, menores de 90° (figura 7).

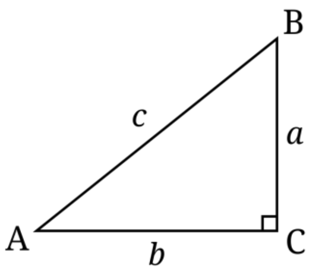


Figura 5

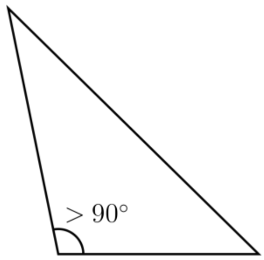


Figura 6

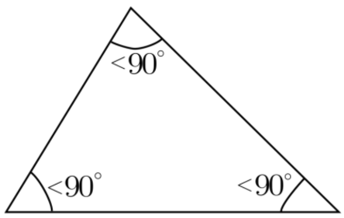


Figura 7

4.1.3 Puntos y rectas notables del triángulo.

A continuación se definen los elementos más notables de un triángulo, los cuales son los siguientes puntos, rectas y segmentos.

DEFINICIÓN. Base. Se le llama base de un triángulo a cualquiera de sus lados.

DEFINICIÓN. Vértice. Se le llama vértice a cada uno de los tres puntos de intersección de los lados de un triángulo.

DEFINICIÓN. Altura. Se le llama altura de un triángulo al segmento perpendicular trazado desde un vértice a la base o lado opuesto o su prolongación.

DEFINICIÓN. Mediana. Se le llama mediana al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

DEFINICIÓN. Bisectriz interior. Se le llama bisectriz interior a la recta que divide un ángulo interior del triángulo en dos ángulos iguales.

DEFINICIÓN. Bisectriz exterior. Se le llama bisectriz exterior a la bisectriz de un ángulo exterior.

DEFINICIÓN. Mediatriz. Se le llama mediatriz a la recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por su punto medio.

4.2 Puntos y figuras notables asociados a un triángulo.

A continuación se presentan los elementos geométricos asociados a un triángulo más destacables.

4.2.1. Circunferencia circunscrita. Circuncentro.

Tres puntos no alineados A, B y C determinan de forma unívoca una circunferencia. El centro de ésta será el punto de corte de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC. Se aprovecha así este hecho para mostrar un primer teorema que motivará posteriormente un par de definiciones.

TEOREMA I

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices, llamado **circuncentro**.

Demostración.

Véase la siguiente figura 8.

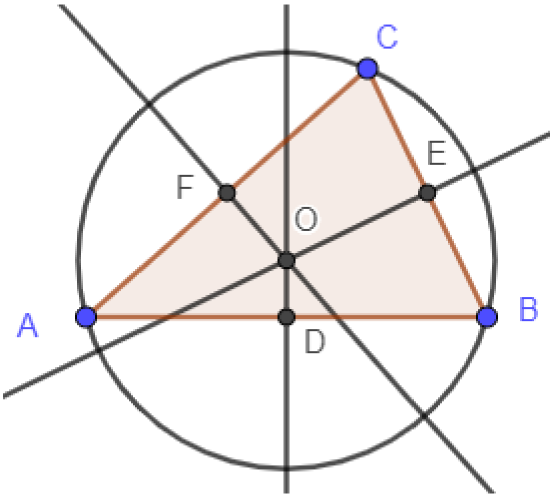


Figura 8.

Los vértices del triángulo son A, B y C. Los puntos medios de cada lado del triángulo son D, E y F. Las mediatrices trazadas desde D y E se cortan en el punto O. Como es lógico, O equidista de A y B por estar contenido en la mediatriz que pasa por D. De igual forma, O equidista de B y C por estar contenido en la mediatriz que pasa por E.

Como O equidista de A y B y también de B y C, entonces O equidista de A y C. De esta forma, O debe estar contenido en la mediatriz trazada desde F.

Así, O es la intersección de las tres mediatrices del triángulo y es equidistante a sus tres vértices. ∎

A continuación se presentan dos definiciones motivadas por el enunciado y demostración del anterior Teorema I.

DEFINICIÓN. Circuncentro. Se le llama circuncentro al punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo.

DEFINICIÓN. Circunferencia circunscrita. Se le llama circunferencia circunscrita de un triángulo a aquella que tiene de centro el circuncentro y pasa por sus tres vértices.

4.2.1 Ortocentro.

Una vez conocidos los conceptos de circuncentro y circunferencia circunscrita, se presenta a continuación el concepto de ortocentro.

TEOREMA II

Si se traza una recta paralela a cada lado del triángulo ABC de la figura 9 que pase por el vértice opuesto, se obtiene un nuevo triángulo $A'B'C'$ en el que cada lado tiene el doble de longitud que el lado correspondiente del triángulo de partida ABC. Los puntos medios del triángulo $A'B'C'$ son A, B y C.

Demostración.

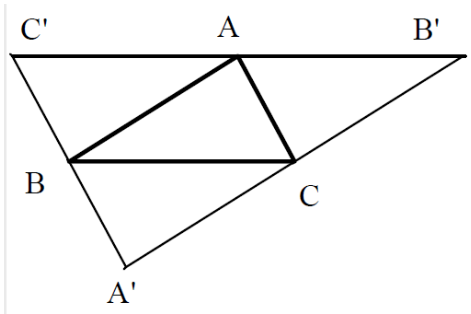


Figura 9

Véase el cuadrilátero formado en la anterior figura 9 por los vértices $ABCB'$. Este cuadrilátero tiene los lados iguales y paralelos dos a dos, por lo que $\overline{AB} = \overline{B'C}$ y $\overline{BC} = \overline{AB'}$.

Por su parte, atendiendo al cuadrilátero formado por los vértices $ABA'C$, $\overline{AB} = \overline{A'C}$. Por tanto, $\overline{AB} = \overline{B'C} = \overline{A'C}$. De esta forma, el lado $A'B'$ tiene el doble de longitud que el lado AB y el vértice C es el punto medio de $A'B'$.

De igual manera se podría hacer la misma demostración para el resto de los lados. ■

Como consecuencia de este Teorema II se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO I

Las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ serán colineales con las alturas del triángulo ABC respectivamente.

Esto puede verse en la siguiente figura 10.

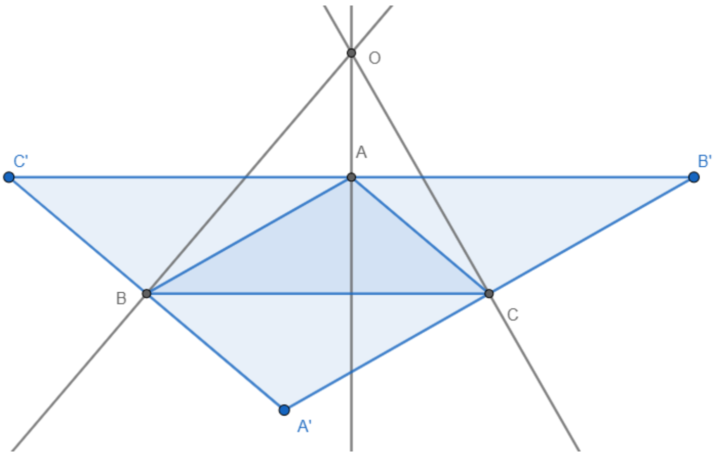


Figura 10

Las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ se cortan en O. De esta manera, este punto O es el punto de corte de las alturas del triángulo ABC.

Este hecho da pie a la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Ortocentro. Se le llama ortocentro al punto de corte de las tres alturas de un triángulo

4.2.2 Circunferencia inscrita. Incentro.

Presentados ya los conceptos de circuncentro, circunferencia circunscrita y ortocentro, véase a continuación el Teorema III relacionado con el incentro y la circunferencia inscrita de un triángulo.

TEOREMA III

Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se cortan en un punto interior equidistante de los lados.

<u>Demostración.</u>

Véase la siguiente figura 11.

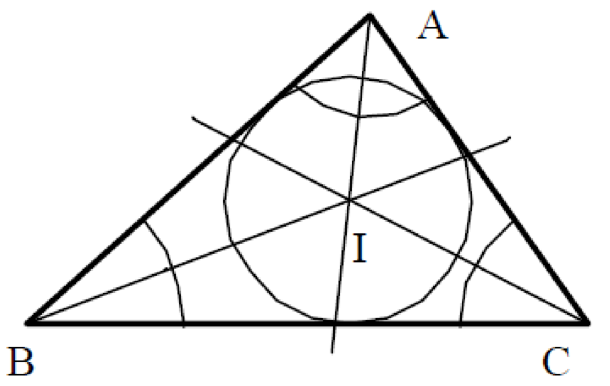


Figura 11

Como se puede observar,

$$0.5\angle A + 0.5\angle B < \angle A + \angle B < 180°. \qquad (1)$$

De esta forma se puede asegurar que las bisectrices de los ángulos internos A y B se cortan. De hecho, el punto de corte es I. Como I está contenido en la bisectriz del ángulo A equidista de los lados AB y AC. Por su parte, como también I está contenido en la bisectriz del ángulo B, equidista de los lados AB y BC. Entonces, se pude afirmar que I equisita de los lados AC y BC. Esto implica que I está contenido en la bisectriz del ángulo C. Así, el punto de corte de las tres bisectrices es I. ■

Este Teorema III motiva las siguientes dos definiciones.

DEFINICIÓN. Incentro. Se llama incentro al punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo.

DEFINICIÓN. Circunferencia inscrita. Se llama circunferencia inscrita de un triángulo a la circunferencia interior con centro el incentro y tangente a los tres lados.

La circunferencia representada en la anterior figura 11 es la circunferencia inscrita, y el punto I el incentro.

4.2.3 Baricentro de un triángulo

Estudiados los conceptos de circuncentro, circunferencia circunscrita, ortocentro, incentro y circunferencia inscrita, se presenta a continuación el Teorema IV asociado al concepto de baricentro de un triángulo.

TEOREMA IV

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

<u>Demostración.</u>

Véase la siguiente figura 12.

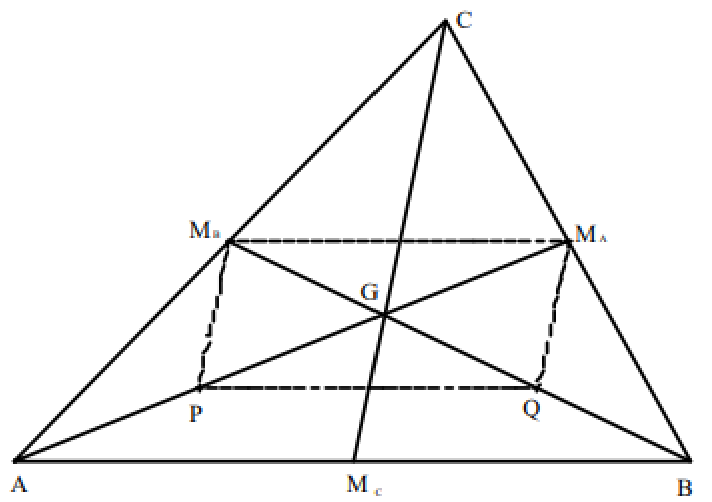


Figura 12

Considérense las medianas de los vértices A y B, las cuales son AM_A y BM_B. Ambas se cortan en el punto G. Como M_A y M_B son el punto medio de los lados opuestos a A y B, el segmento M_AM_B es la paralela media del lado AB, esto es, es paralelo a AB y de longitud la mitad. Atendiendo ahora al triángulo ABG, los puntos P y Q se encuentran en la mitad de los lados opuestos a A y B. De esta forma, el segmento PQ también es la paralela media del lado AB. Esto implica que el rectángulo PQM_AM_B es un paralelogramo. Así, PM_A y QM_B son sus diagonales, las cuales se cortan en G. De esta forma,

$$\overline{GM_A} = \overline{GP};\ 2\overline{GM_A} = 2\overline{GP} = \overline{AG} \qquad (2)$$

$$\overline{GM_B} = \overline{GQ};\ 2\overline{GM_B} = 2\overline{GQ} = \overline{BG} \qquad (3)$$

Aplicando el mismo razonamiento para una de estas dos medianas y la tercera que no se ha considerado, se obtiene que se cortan todas ellas en el punto G y se verifica la misma relación que viene dada por (2) y (3). ■

Este Teorema IV motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Baricentro. Se llama baricentro al punto de corte de las tres medianas de un triángulo.

El baricentro de un triángulo coincide con su centro de gravedad.

4.2.4 La recta de Euler.

A continuación se estudiará una recta notable de un triángulo muy destacable: la recta de Euler. Para ello, se presenta el siguiente Teorema V.

TEOREMA V

I) El baricentro, ortocentro y circuncentro de cualquier triángulo se encuentran alineados.

II) La distancia del segmento que une el baricentro con el ortocentro es el doble de la distancia del segmento que une el baricentro con el circuncentro.

En la figura 13 puede comprobarse la veracidad del teorema.

Este Teorema V motiva la definición del concepto de recta de Euler. La recta de Euler es aquella que une el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

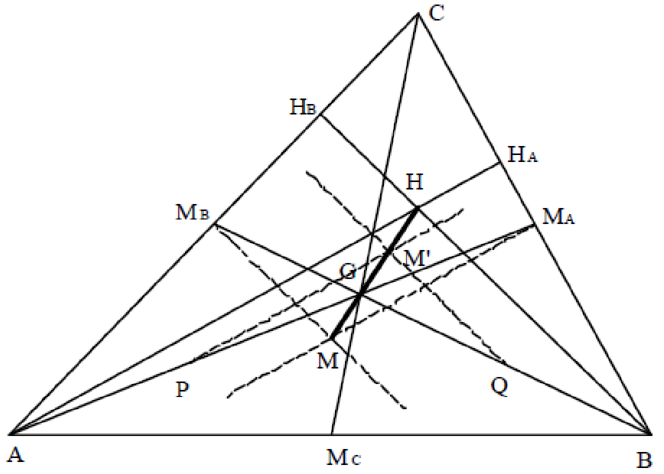


Figura 13

4.3 Relaciones métricas en un triángulo.

4.3.1. Rectas antiparalelas.

Véase la siguiente figura 14.

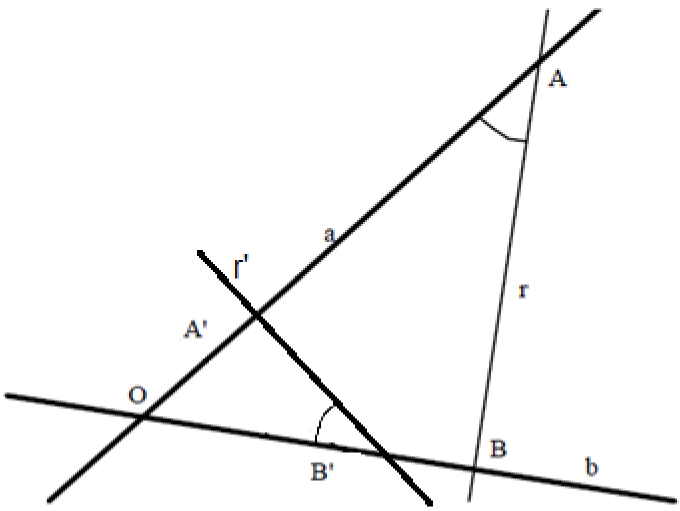


Figura 14

Sean a y b dos rectas secantes que se cortan en el punto O. Por su parte, sean r y r' dos rectas que cortan a a y b en A y B y en A' y B' respectivamente, de tal forma que los ángulos $\angle OB'A'$ y $\angle OAB$ son iguales. De esta forma, los ángulos $\angle OA'B'$ y $\angle OBA$ también serán iguales por ser suplementarios de los anteriores respecto de $\angle AOB$.

Verificándose estas condiciones podrá decirse que las rectas r y r' son antiparalelas de a y b. De igual modo, las rectas a y b son antiparalelas de r y r'.

Puede observarse entonces que los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, ya que todos sus ángulos son iguales. De esta forma, se cumple que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \ . \qquad (4)$$

Por tanto,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \ . \qquad (5)$$

Sabido esto, puede anunciarse la siguiente proposición que se acaba de demostrar:

PROPOSICIÓN. Dos rectas concurrentes a y b que se intersectan en O son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas r y r' en puntos A y B y A' y B' respectivamente cuyo producto de distancias a O es el mismo en ambas rectas, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.

4.3.2. Triángulos rectángulos.

Una vez visto el concepto de rectas antiparalelas, se aplicará éste al estudio de los triángulos rectángulos. Véase la siguiente figura 15.

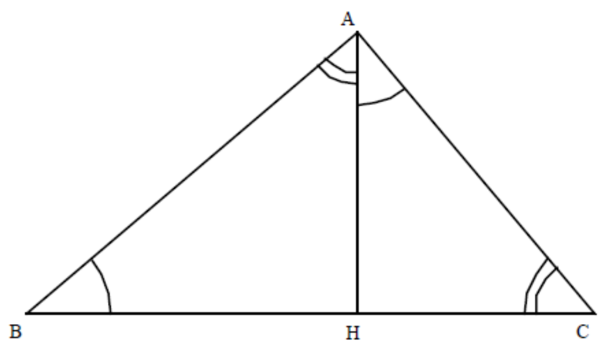


Figura 15

Puede verse un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. En este triángulo se tomarán en consideración cuatro rectas, las tres determinadas por los catetos y la hipotenusa y una cuarta recta determinada por los puntos A y H. Puede comprobarse que las rectas determinadas por la altura AH y el cateto AC son antiparalelas respecto de las rectas determinadas por el cateto AB y la hipotenusa BC. De igual forma, las rectas determinadas por el cateto AB y la hipotenusa BC son antiparelalas de las rectas determinadas por la altura AH y el cateto AC.

De esta forma, se cumple que:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \tag{6}$$

y,

$$\overline{CA}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}\,. \tag{7}$$

A partir de esto se puede enunciar enunciar el siguiente Teorema VI.

TEOREMA VI. Teorema del Cateto.

Cada cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. Esto significa que cada cateto elevado al cuadrado es igual al producto de la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Por su parte, existe otro teorema, el Teorema de la Altura, que se enuncia de la siguiente forma.

TEOREMA VII. Teorema de la Altura.

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta.

<u>Demostración.</u>

Puede verse en la anterior figura 15 que los triángulos rectángulos ABH y ACH son semejantes (los ángulos iguales quedan señalados de igual forma en la figura). Por tanto,

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HA}}{HC}\ . \tag{8}$$

Así,

$$\overline{HA}^2 = \overline{HB} \cdot HC\,. \quad \blacksquare \tag{9}$$

Conocido el Teorema de la Altura, véase ahora el siguiente Teorema VIII.

TEOREMA VIII.

Si se cumple que $\overline{HA}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC}$, siendo ABH y ACH dos triángulos rectángulos, entonces el triángulo ABC es rectángulo.

Demostración.

Según la ecuación del teorema:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HA} = \overline{HB} \cdot \overline{HC} \,. \tag{10}$$

Reordenando,

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} \quad . \tag{11}$$

De (11) se deduce que los triángulos rectángulos ABH y ACH de la figura 15 son semejantes. De esta forma, los ángulos $\angle BAH$ y $\angle ACH$ son iguales:

$$\angle BAH = \angle ACH \,. \tag{12}$$

Por su parte, el ángulo $\angle ACH$ será

$$\angle ACH = 90° - \angle CAH \quad . \tag{13}$$

Las ecuaciones (12) y (13) implican que

$$\angle BAH = 90° - \angle CAH \quad . \tag{14}$$

Por tanto, de (14) se deduce que

$$\angle BAC = 90°. \tag{15}$$

Entonces, el triángulo ABC es rectángulo. ■

4.3.3 Teorema de Pitágoras.

Conocido el concepto de rectas antiparalelas y su aplicación para enunciar y demostrar algunos teoremas referentes a los triángulos rectángulos, se presenta a continuación el teorema de Pitágoras.

TEOREMA IX. Teorema de Pitágoras.

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Demostración.

El triángulo ABC de la figura 15 es rectángulo. De esta forma, en virtud del Teorema del Cateto:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \tag{16}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH} \tag{17}$$

Así,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{CH}) = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}^2 \,. \ ■ \tag{18}$$

4.4 Generalización del Teorema de Pitágoras.

A continuación se generalizará el teorema de Pitágoras para cualquier tipo de triángulo, no solo rectángulo.

TEOREMA X

El cuadrado de un lado opuesto a un ángulo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más o menos el doble producto de uno de esos lados por la proyección del otro sobre él. El signo dependerá de si el ángulo mencionado es agudo u obtuso.

Demostración.

Véanse los triángulos de la siguiente figura 16.

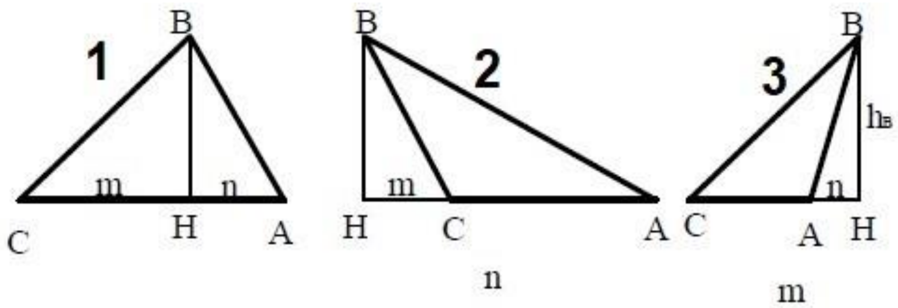


Figura 16

Cada lado se denota con la letra de su vértice opuesto en minúscula. Por su parte, m y n son las longitudes de los segmentos CH y AH. Además, h será la longitud de la altura sobre la base del triángulo. Para los triángulos 1 y 2 se tiene:

$$a^2 = m^2 + h^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2bn\,. \tag{19}$$

Por su parte, para el triángulo 3 se tiene:

$$a^2 = m^2 + h^2 = (b+n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 + 2bn\,. \tag{20}$$

De esta forma,

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bn \quad siendo \begin{cases} +\ si\ \angle A > 90° \\ -\ si\ \angle A < 90° \\ n = 0\ si\ \angle A = 90° \end{cases} \quad \blacksquare$$

Fruto de este Teorema X nace el siguiente corolario.

COROLARIO II

Dadas las longitudes de los lados de un triángulo se verifica:

- El ángulo asociado al vértice A será agudo si el cuadrado del lado opuesto a es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos (b y c).

- El ángulo asociado al vértice A será recto si el cuadrado del lado opuesto a es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos (b y c).
- El ángulo asociado al vértice A será obtuso si el cuadrado del lado opuesto a es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos.

5 FUNDAMENTACIÓN DIDÁCTICA.

En este capítulo se identifican dos investigaciones relacionadas con la didáctica del Teorema de Pitágoras y se explican brevemente.

La primera de ellas se titula *La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele* (2013). Sus autores son Gilberto Vargas Vargas y Ronny Gamboa Araya. El artículo se centra en cómo aprenden mejor los alumnos y algunas estrategias a llevar a cabo en clase.

El segundo artículo se titula *Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras* (2017). Sus autores son Aarón Víctor Reyes-Rodríguez, Carlos Rondero-Guerrero, Juan Alberto Acosta Hernández, Marcos Campos-Nava y Agustín Alfredo Torres-Rodríguez. Esta investigación está centrada en los docentes.

5.1. *La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele.*

Resumen.

Este artículo presenta una investigación llevada a cabo con estudiantes de secundaria acerca del Teorema de Pitágoras y su recíproco haciendo uso del software *GeoGebra* y teniendo presente el modelo de Van Hiele. Para tal fin se llevó a cabo una metodología didáctica a través de doce actividades en un grupo de alumnos de noveno curso de secundaria en Costa Rica, lo que equivale a 3° ESO en España. En este grupo experimental se implementó una estrategia metodológica mientras que en otro grupo de control se aplicó un enfoque tradicional. Este grupo de control trabajó las mismas doce actividades que el grupo experimental, con la diferencia de que esto se llevó a cabo mediante una metodología tradicional. La investigación es de tipo cualitativa.

Los estudiantes que trabajaron mediante la estrategia metodológica con *GeoGebra* se sintieron más motivados que los alumnos en los que se aplicó un enfoque tradicional. La estrategia metodológica transmitió confianza a los alumnos con peores calificaciones, de forma que éstos se sintieron más seguros de discutir verbalmente diversas ideas de geometría con los estudiantes de mejores resultados académicos.

El artículo remarca la problemática presente en la enseñanza de las matemáticas en niveles medios, que se refleja en niveles altos, incluso en los propios profesores. La causa parece estar relacionada con la manera de enfocar la enseñanza en el aula, más orientada a superar un examen que al aprendizaje de los procesos matemáticos y sus significados. En este desolador panorama, la geometría es una de las ramas de las matemáticas en las que los estudiantes presentan un mayor conflicto.

De esta forma, surge la necesidad de realizar un análisis acerca de qué estrategia metodológica implementar para solventar los problemas que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas y, en especial, de la geometría. El uso de software puede ser un aspecto fundamental a tener en cuenta para poner remedio a esta problemática.

Marco teórico: Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

A continuación se explicará en qué consisten los niveles y las fases del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, ya que éste será tomado en consideración a lo largo de la investigación. Según el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el estudiante presenta cinco niveles de razonamiento, los cuales son:

- Nivel 1. Las figuras geométricas son reconocidas por el alumno como un todo sin diferenciar partes ni componentes.
- Nivel 2. El estudiante puede identificar partes o propiedades de las figuras geométricas, pero no puede relacionarlas ni clasificarlas.
- Nivel 3. El individuo identifica las propiedades de las figuras, las relaciona y las clasifica.
- Nivel 4. El alumno realiza deducciones y demostraciones de las proposiciones que se plantean y las considera esenciales.
- Nivel 5. El estudiante maneja la geometría de manera abstracta, algo que solo se desarrolla en estudiantes de universidad si acaso.

Además de estos cinco niveles de razonamiento geométrico, en el modelo de Van Hiele se considera que el estudiante debe pasar por cinco fases de aprendizaje para avanzar de un nivel al siguiente. Estas fases son las siguientes:

- Fase 1: Información. El estudiante toma contacto con el nuevo contenido matemático.
- Fase 2: Orientación dirigida. Mediante problemas y actividades los alumnos son guiados hacia el aprendizaje que deben adquirir.
- Fase 3: Explicitación. Los alumnos deben de ser capaces de expresar de formar verbal lo que han aprendido.
- Fase 4: Orientación Libre. Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos en las fases anteriores para resolver problemas y realizar actividades.
- Fase 5: Integración. Los alumnos toman una idea global de todo lo

que han aprendido integrando los nuevos conocimientos.

Marco teórico: la enseñanza del Teorema de Pitágoras y su recíproco.

Explicados los niveles y fases asociados al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, se presentan a continuación algunas deducciones llevadas a cabo por diversos autores acerca de la enseñanza del Teorema de Pitágoras y su recíproco.

Hay un gran salto entre lo que se enseña a los estudiantes y lo que éstos recuerdan en el futuro, y más aún si se trata de las herramientas que adquieren los alumnos para resolver problemas relacionados con el Teorema de Pitágoras. Esto debe hacer pensar acerca de la forma en que se lleva a cabo la didáctica de esta temática.

La experiencia docente pone de manifiesto que el Teorema de Pitágoras se enseña de una forma algorítmica sin atender a la construcción del conocimiento por parte del estudiante ni a la comprobación por él mismo de lo que enuncia el teorema.

Ante este panorama es necesario desarrollar una propuesta didáctica que permita al alumno construir el conocimiento por él mismo utilizando herramientas TICS y que le haga avanzar en su nivel de razonamiento geométrico.

Metodología de la investigación.

Con el objetivo de mejorar la enseñanza del Teorema de Pitágoras se desarrolló una estrategia metodológica consistente en el uso del software *GeoGebra* mediante doce actividades. El grupo experimental fue una clase de secundaria de Costa Rica de noveno curso (3º ESO en España). El grupo de control fue una clase de igual nivel escolar que trabajó las mismas actividades desde un enfoque tradicional. Se pretendía de esta forma comparar el nivel de razonamiento geométrico del grupo experimental con el del grupo de control. El estudio fue de tipo cualitativo.

Cada una de las doce actividades correspondía a una o varias fases del modelo de Van Hiele y pretendían identificar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

A continuación se desarrolla la implementación y resultados de una de estas actividades. Ésta consiste en el descubrimiento por parte del alumnado de la relación que refleja el Teorema de Pitágoras. Se basa en la disección de Henry Perigal (figura 17).

Para explicar en qué consiste la disección de Henry Perigal debe partirse de un triángulo rectángulo y de los cuadrados construidos sobre cada lado del mismo. Se determina el centro del cuadrado construido sobre el cateto de mayor longitud. Por este centro se traza una recta paralela y otra perpendicular a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Mediante estas dos rectas, el cuadrado sobre el cateto de mayor longitud queda dividido en cuatro partes. Con estas cuatro partes junto con el cuadrado construido sobre el cateto de menor longitud puede cubrirse toda el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.

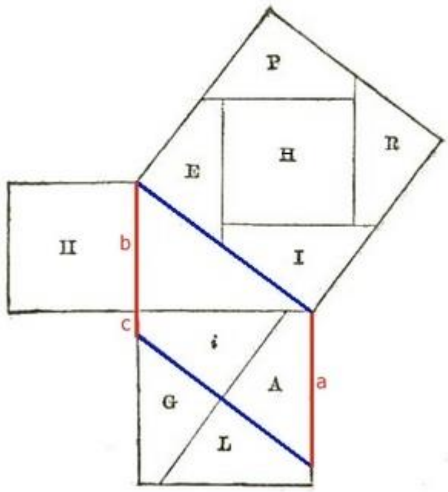


Figura 17

A los estudiantes del grupo experimental (estrategia metodológica) se les presentó una aplicación del *GeoGebra* que contenía un triángulo rectángulo y los respectivos cuadrados construidos sobre cada lado del mismo (figura 18).

En un recuadro aparte los estudiantes encontraban las piezas asociadas a la disección de Perigal y el cuadrado construido sobre el cateto de menor longitud. La medida de los lados del triángulo podía variarse mediante el software, de forma que también variaban las disecciones de Perigal y los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo.

El objetivo era que los estudiantes, desplazando con el ratón las piezas del recuadro de la derecha (figura 18), cubrieran los cuadrados construidos sobre los catetos, después cubrieran el cuadrado construido sobre la hipotenusa y finalmente descubrieran la relación existente entre las áreas de estos cuadrados. De esta forma llegarían a la relación que establece el Teorema de Pitágoras. Los estudiantes tenían la posibilidad de crear diversas familias de triángulos rectángulos en los que siempre se cumpliría la conclusión resultante.

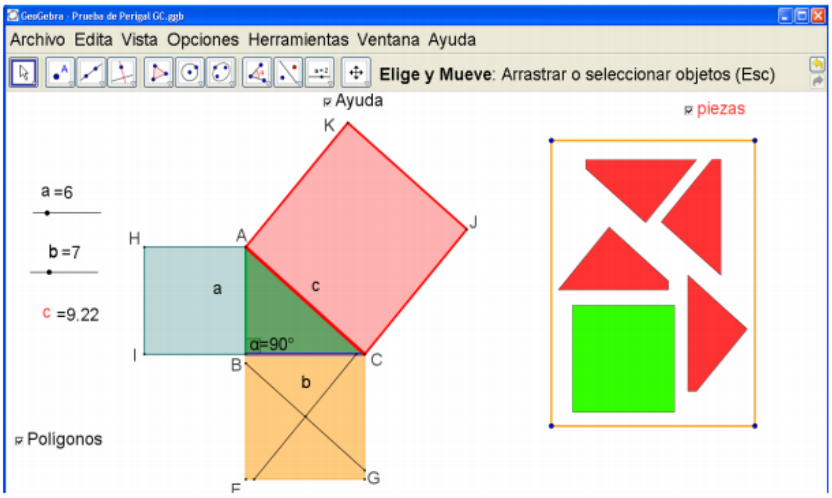


Figura 18

Por su parte, el grupo de control que trabajó con un enfoque tradicional no contaba con la ayuda de *GeoGebra*. De esta forma, las piezas se dieron dibujadas en papel y los alumnos tenían que recortarlas y manipularlas según una guía proporcionada. El objetivo era el mismo que el que se tenía con el grupo experimental, comprobar la relación del Teorema de Pitágoras.

Análisis.

A continuación se analizan y presentan los resultados de esta actividad planteada. En dicha actividad se esperaba que los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control mostraran las siguientes características:

a) Logra colocar las piezas proporcionadas sobre el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

b) Establece una relación entre la suma de las áreas de las piezas proporcionadas y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

c) Verifica la igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y la suma de las áreas de las piezas proporcionadas.

d) Establece una relación entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

e) Establece correctamente la relación en un triángulo rectángulo de la longitud de la hipotenusa y la longitud de los catetos.

f) Expresa sus ideas correctamente desde un punto de vista matemático utilizando un lenguaje simbólico adecuado.

La siguiente tabla 1 muestra los resultados de esta actividad del grupo de estudiantes del enfoque tradicional (ET) según las características esperadas que se acaban de describir.

ET

Características / Participantes	a.	b.	c.	d.	e.	f.
David	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí
Isabel	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
María	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Mónica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Esteban	Sí	No	No	Sí	No	Sí
Mariana	Sí	No	No	Sí	Sí	No

Tabla 1

Por su parte, la siguiente tabla 2 sintetiza el logro de los estudiantes del grupo experimental que trabajaron con la estrategia metodológica (EM).

EM

Características / Participantes	a.	b.	c.	d.	e.	f.
Carlos	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Lucía	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Raúl	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Diego	Sí	Sí	Sí	Sí	SI	No
Jimena	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Julia	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 2

Conclusiones.

Se presentan a continuación las conclusiones que pueden obtenerse de los resultados de la investigación.

En cuanto a los objetivos de la investigación, fue posible determinar según el modelo de Van Hiele el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. Así, se comparó el nivel de razonamiento geométrico al desarrollar el Teorema de Pitágoras de los estudiantes del grupo experimental con el de los alumnos del grupo de control.

Por su parte, los estudiantes que trabajaron las actividades a través de *GeoGebra* mostraron una mayor motivación que los que lo hicieron desde un enfoque tradicional.

Por otro lado, en cuanto a la estrategia metodológica didáctica, preparar actividades de este tipo con *GeoGebra* que fomente en los alumnos un aprendizaje significativo requiere de un mayor tiempo de preparación previo a la clase por parte del profesor. Además, al principio se avanza de forma más lenta con este tipo de metodología que desarrollando una clase desde un enfoque más tradicional. Sin embargo, esto queda compensado con el hecho de que los estudiantes adquieren con este tipo de actividades innovadoras una mayor capacidad de análisis de hechos matemáticos.

Con esta estrategia metodológica se ayudó a que los estudiantes con peores resultados académicos discutieran de igual a igual las ideas planteadas en clase con los estudiantes con mejores notas. De esta forma, este tipo de metodología ayudó a que los estudiantes menos ventajosos ganasen confianza en ellos mismos.

Por último, en cuanto al uso del *GeoGebra*, los estudiantes del grupo experimental emitieron juicios más acertados sobre las actividades desarrolladas gracias al uso de este software respecto de los alumnos del grupo de control. Los alumnos que trabajaron según la estrategia metodológica podían explorar varias situaciones de un mismo problema al mismo tiempo al manipular dimensiones y formas de las figuras geométricas planteadas. Este hecho les dio una visión más enriquecedora que la obtenida por los estudiantes que trabajaron desde un enfoque tradicional.

Los estudiantes que trabajaron con el software se sintieron más motivados a explorar, plantear conjeturas y probarlas que aquellos que lo hicieron con lápiz y papel. Además, los alumnos del grupo experimental manifestaron que este tipo de actividades innovadoras rompen la rutina típica del aula, algo que consideraron positivo.

El uso del *GeoGebra* les permitió a los estudiantes del grupo experimental resolver situaciones y realizar argumentaciones que los estudiantes del grupo de control no pudieron llevar a cabo.

El estudio también reveló que todos los estudiantes tuvieron dificultad para expresar sus ideas verbalmente mediante un lenguaje matemático correcto. Este hecho puede ser debido a la poca importancia que se le da a esta competencia en los colegios.

5.2. *Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras.*

Resumen.

En este artículo se reflejan los resultados de una investigación exploratoria cuyo objetivo fue corroborar que las creencias de los profesores de matemáticas acerca del Teorema de Pitágoras evidencian un reduccionismo didáctico relativo a esta temática. Se plantearon cuestionarios a cinco profesores de matemáticas de México de bachillerato y se entrevistó a un profesor de ingeniería que imparte matemáticas y física. El resultado más relevante obtenido fue que los profesores consideran el Teorema de Pitágoras como un hecho aislado y no como parte de una densa red estructurada de ideas matemáticas. Así, resulta importante que los profesores reflexionen acerca de sus propias creencias y las implicaciones que éstas tienen en el aprendizaje de los alumnos.

Introducción.

Se ha comprobado que la actividad de los profesores no depende solo de su formación disciplinar, epistemológica o didáctica, sino también de las creencias que tengan respecto a determinadas ideas o tópicos. El conocimiento de las ideas de los profesores aporta información imprescindible para plantear mejoras en la formación profesional que repercutan en el mejor aprendizaje de los estudiantes. El objetivo de esta investigación es proporcionar evidencias que demuestren que las ideas de los profesores acerca del Teorema de Pitágoras son un indicador del reduccionismo didáctico que existe en torno a este saber matemático.

El hecho de que exista reduccionismo didáctico en torno al Teorema de Pitágoras en las aulas de secundaria significa que los profesores no son capaces de identificar las relaciones estructurales existentes entre los conceptos que posibilitan un entendimiento adecuado de este saber.

El Teorema de Pitágoras forma parte de una red de significados y conceptos llamada Relación Pitagórica. Esta Relación Pitagórica comprende, entre otros puntos, los siguientes:

- Ternas pitagóricas. Por ejemplo: $(3, 4, 5)$, ya que $5^2 = 3^2 + 4^2$.
- Relación entre áreas de cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- La expresión $a^2 + b^2 = c^2$ asociada al concepto de circularidad y que puede encontrarse en la igualdad $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

- Una familia de lugares geométricos referidos a la ecuación $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$.
- Distancia entre dos puntos: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$.
- Relación entre cantidades infinitesimales: $dx^2 + dy^2 = dl^2$.

A pesar de todos estos significados, las matemáticas impartidas en secundaria reducen el Teorema de Pitágoras a la expresión algebraica $a^2 + b^2 = c^2$.

Marco conceptual.

Resumida e introducida la temática de la investigación, se verá a continuación qué son las creencias.

De manera generalizada, las creencias son pensamientos subjetivos que se consideran verdaderos. Son ideas personales arraigadas, difíciles de modificar, porque se han creado a partir de experiencias vividas. Todas ellas forman la visión que cada uno tiene del mundo matemático. Estos conocimientos previos se usan para construir nuevos saberes, pero a veces pueden ser un obstáculo en el aprendizaje.

Metodología de investigación.

Esta investigación es de tipo exploratorio y cualitativo. La recogida de datos se llevó a cabo mediante un cuestionario de doce preguntas de respuesta abierta. Este cuestionario se aplicó a una muestra no aleatoria de cinco profesores voluntarios de secundaria de México.

Además, se realizó una entrevista semi-estructurada a un profesor de ingeniería de matemáticas y física de México, el cual es egresado de una licenciatura en matemáticas aplicadas y una maestría en matemáticas.

Análisis de las creencias asociadas al Teorema de Pitágoras.

A continuación se expondrán y analizarán las creencias relacionadas con el Teorema de Pitágoras por parte de los profesores con los cuales se llevó a cabo la investigación.

En cuanto al enunciado del teorema, en algunos casos se redujo a hacer referencia a la expresión algebraica $a^2 + b^2 = c^2$, sin ni siquiera hacer alusión a un triángulo rectángulo. Esto es reflejo de un reduccionismo conceptual excesivo y de la falta de entendimiento de qué es un teorema, lo cual se entiende como un enunciado condicional que debe ser demostrado. Así, se muestra el reduccionismo didáctico en este caso al considerar el Teorema de Pitágoras como una fórmula o ecuación, sin ni siquiera mencionar que las variables pueden hacer alusión a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Respecto a esto, el profesor de universidad dijo que sus estudiantes conocen y plantean el Teorema de Pitágoras, pero o bien lo hacen mediante la reducción a la expresión algebraica $a^2 + b^2 = c^2$ o no lo saben interpretar.

Respecto a las creencias sobre las formas de justificación, uno de los profesores de la muestra aleatoria utilizó únicamente el triángulo rectángulo de lados $(3, 4, 5)$ para comprobar la igualdad de áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos respecto de la del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Esto es una prueba de reduccionismo didáctico. Por su parte, el profesor universitario indicó que existen múltiples fórmulas de demostrar el teorema y que él suele usar un enfoque geométrico. Añadió además que los estudiantes universitarios suelen sorprenderse al comprobar que un teorema pueda demostrarse, ya que están acostumbrados a no discutir la validez de las proposiciones que se les plantea. Considerar las matemáticas como un conjunto de proposiciones planteadas que no necesitan de argumentación o demostración es otra muestra de reduccionismo didáctico.

Por otro lado, en cuanto a las creencias respecto a los contextos y aplicaciones de uso, los profesores manifestaron que el Teorema de Pitágoras puede aplicarse a otras asignaturas y otros ámbitos como una fórmula para el cálculo de distancias, pero no manifestaron la articulación existente entre los conceptos de la Red Pitagórica. Así, se demuestra el reduccionismo didáctico mediante la creencia de que el Teorema de Pitágoras se aplica a otros contextos como una fórmula para el cálculo de distancias, sin que se expliquen los significados inherentes a esos contextos.

Por su parte, en cuanto a las creencias acerca de los aspectos históricos y epistemológicos, los profesores manifestaron que no consideraban importantes estos antecedentes para la construcción del saber matemático, hecho que de nuevo denota un presente reduccionismo didáctico.

Respecto de las creencias en cuanto a la generalización o extensión, la mayor parte de los profesores respondió que no es posible generalizar el Teorema de Pitágoras. Esto indica que no tienen claro el concepto de generalizar. Por ejemplo, en cuanto a la demostración geométrica de las áreas de cuadrados, los profesores pensaban que solo puede llevarse a cabo con cuadrados y que no era posible realizar la generalización con otro tipo de figuras, por ejemplo semicircunferencias con diámetro el lado del triángulo rectángulo. La generalización posibilita articular ideas matemáticas y los profesores no le otorgan la importancia que se merece.

Conclusiones.

A continuación se verán algunas de las conclusiones que pueden obtenerse de esta investigación.

En cuanto a la relación entre las creencias de los profesores y el reduccionismo didáctico, queda de manifiesto que los docentes no son conscientes de la red articulada de conceptos de la que forma parte el Teorema de Pitágoras. Únicamente articulan el teorema con la idea de distancia. De igual modo se observó que los profesores no dan importancia a la justificación de los resultados y, en caso de hacerlo, se lleva a cabo mediante casos muy particulares.

Queda constancia así mismo del poco interés prestado por parte del profesorado hacia los aspectos históricos y epistemológicos de este saber.

En el ámbito disciplinar, el Teorema de Pitágoras es muy relevante debido a su papel fundamental en la construcción de conocimiento de diversas áreas. Sin embargo, en el ámbito didáctico, es concebido como un hecho aislado que a lo sumo puede aplicarse al cálculo de distancias. Los autores de esta investigación conjeturan que esto se debe al sistema de creencias que han ido pasando de generación en generación que ha motivado un decantamiento epistemológico del Teorema de Pitágoras, el cual ha quedado reducido a un enunciado o expresión algebraica.

De esta forma, es complicado que en las aulas se dé el entendimiento de las matemáticas si no se promueve la articulación de ideas y conceptos. Este carácter de las matemáticas que se enseñan es consecuencia directa de las creencias de los profesores de secundaria y bachillerato. Este sistema de creencias va transmitiéndose de generación en generación, impidiendo una renovación de la forma de enseñar matemáticas. Es por tanto importante que el profesor reflexione acerca de sus propias creencias y el impacto que éstas tienen en su actividad docente. Así mismo, los programas de formación del profesorado deberían hacer que los docentes cuestionen sus propias creencias y se percaten del impacto que tienen éstas sobre sus saberes disciplinares y didácticos.

5.3. Reflexiones conjuntas de los dos artículos.

A continuación se detallan las reflexiones que pueden extraerse de los dos artículos anteriormente comentados y que se han tenido en cuenta para la elaboración de la unidad didáctica:

- El Teorema de Pitágoras ha sido enseñado normalmente desde un punto de vista algebraico. Los alumnos memorizan la fórmula y normalmente no adquiere para ellos un significado geométrico.
- El anterior punto se debe a que el profesor aprendió el Teorema de Pitágoras en su época de estudiante a través de la misma metodología.

- Conviene profundizar en el significado del Teorema de Pitágoras y darle una buena importancia a su manipulación geométrica a través de juegos manipulativos o del uso de softwares.
- El Teorema de Pitágoras genera una densa red de aplicaciones del mismo. Por ejemplo, es usado en arquitectura para el cálculo de rampas. En ingeniería, orientaciones geográficas o astronomía puede usarse para el cálculo de distancias. Cuanto más amplia sea la red de relaciones creada a partir del Teorema de Pitágoras considerada en la enseñanza, más significativo será el aprendizaje por parte de los discentes.

6. PROYECCIÓN DIDÁCTICA.

Título: Teorema de Pitágoras.

6.1. Justificación.

La geometría y, en particular, el Teorema de Pitágoras, son una parte de las matemáticas fundamental para el estudiante de secundaria. Es muy importante que el alumno afiance y comprenda los conceptos asociados a esta temática porque se encontrará a lo largo de su vida académica múltiples aplicaciones de los mismos. Veamos a continuación algunas de ellas.

El concepto del Teorema de Pitágoras está implícito en las ternas pitagóricas, es decir, las ternas de números naturales (a, b, c) que satisfacen la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$. Así mismo hay que tener en cuenta la idea de circularidad expresada en la relación $sen^2 x + \cos^2 x = 1$. De igual forma, para calcular en geometría plana analítica la distancia entre dos puntos se aplica el Teorema de Pitágoras mediante la expresión $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Por su parte, el estudiante puede enfrentarse en su etapa universitaria al triángulo característico de Leibniz que relaciona cantidades infinitesimales mediante la ecuación $dl^2 = dx^2 + dy^2$.

Por otro lado, según el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Real Decreto, 2014), el Teorema de Pitágoras aparece en el Bloque 3 de Geometría de 1º y 2º de ESO. Por su parte, la *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016), ubica el Teorema de Pitágoras en el 2º curso de la ESO.

En dicha orden, este bloque 3 de geometría sigue un orden razonable y lógico en cuanto a los contenidos. Una vez se estudian los triángulos rectángulos y el Teorema de Pitágoras, los temas que siguen tienen relación con:

- Poliedros y cuerpos de revolución.
- Áreas y volúmenes.
- Longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.
- Semejanza.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

De esta forma, el Teorema de Pitágoras es fundamental en este Bloque 3 de

Geometría del currículo de 2º de ESO.

6.2. Contextualización del centro y del aula.

El centro escolar al que se enfoca la presente unidad didáctica es el I.E.S Virgen del Carmen. Éste se ubica en la zona céntrica de Jaén. Las familias de sus estudiantes son de clase media. Los alumnos proceden de centros de la misma zona geográfica y de otros cercanos a las afueras de la ciudad, hecho que dota al instituto de una rica diversidad de estudiantes.

La clase de 2º de ESO a la que se orienta la unidad didáctica se compone de treinta discentes. Por su parte, el centro consta de una serie de herramientas que facilitarán el trabajo de ciertos contenidos y la realización de determinadas actividades, tales como:

- Sillas y mesas aptas para su desplazamiento en caso de realizar actividades en grupo.
- Pizarra electrónica y pizarra de tiza convencional.
- Sala de ordenadores y carritos con portátiles.

Por un lado, la sala de ordenadores del centro permitirá llevar a cabo actividades empleando ciertos softwares informáticos como el *GeoGebra.* Por su parte, el hecho de que las sillas y mesas sean aptas para su desplazamiento permite realizar ciertas actividades dividiendo la clase en grupos. Cabe destacar que el espacio en la clase es algo reducido, lo que hace que los grupos no puedan ser muy extensos (cuatro personas a lo sumo).

Debe tenerse en cuenta que la unidad didáctica consta de una actividad de tipo cooperativo, de forma que para aplicarse a una determinada clase, ésta debe tener los suficientes alumnos para poder llevarse a cabo.

6.3. Objetivos.

Los objetivos de la unidad didáctica se dividirán en tres partes: objetivos generales de etapa, objetivos del área de matemáticas y objetivos concretos de la unidad. A continuación se desarrolla cada uno de ellos.

6.3.1. Objetivos generales de etapa.

El *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Real Decreto 2014) refleja en el Artículo 11 (CAPÍTULO II) los objetivos de la Educación Secundaria

Obligatoria.

Estos objetivos generales de etapa que se persiguen con la presente unidad didáctica son los siguientes:

- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

6.3.2. Objetivos del área de matemáticas.

La *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016) establece los objetivos del área de esta asignatura.

De entre todos estos objetivos, con el desarrollo de la presente unidad didáctica se persiguen los siguientes:

- Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos

elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

- Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
- Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
- Valorar las matemáticas como parte integrante de la cultura andaluza, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual. Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, la salud, el consumo, el reconocimiento de la contribución de ambos sexos al desarrollo de

nuestra sociedad y al conocimiento matemático acumulado por la humanidad, la aportación al crecimiento económico desde principios y modelos de desarrollo sostenible y utilidad social o convivencia pacífica.

6.3.3. Objetivos de la unidad.

A continuación se formulan los objetivos que se espera que los alumnos consigan a lo largo del desarrollo de la unidad:

- OB1. Saber clasificar un triángulo según sus lados y sus ángulos. Saber usar *GeoGebra* para representar cualquier tipo de triángulo y medir en él uno de sus ángulos o la longitud de uno de sus lados.
- OB2. Conocer y comprender el Teorema de Pitágoras. Saber justificar geométricamente el Teorema de Pitágoras.
- OB3. Saber trabajar en equipo. Adquirir habilidades dialógicas y colaborativas asociadas al trabajo en grupo.
- OB4. Conocer los aspectos básicos del punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras. Conocer a grandes rasgos la vida y obra de Pitágoras.
- OB5. Saber aplicar el Teorema de Pitágoras en problemas en los que haya que calcular el lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.
- OB6. Saber aplicar el Teorema de Pitágoras a situaciones de la vida real.
- OB7. Saber aplicar el Teorema de Pitágoras en problemas en los que aparezcan polígonos regulares.
- OB8. Saber aplicar el Teorema de Pitágoras en problemas en los que aparezcan figuras planas.

6.4. Competencias clave.

A lo largo de la presente unidad se trabajan las siguientes competencias clave:

- Competencia en comunicación lingüística (CCL). Es el resultado de la acción comunicativa. Esta unidad puede contribuir al desarrollo de esta competencia mediante la realización de una actividad por grupos. En ésta, los alumnos tendrán que dialogar entre ellos para dar solución a la actividad propuesta.

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT). Implica la adquisición de un conjunto de destrezas que permitan la aplicación de las herramientas matemáticas en diversos contextos. La unidad contribuye al desarrollo de esta competencia mediante problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras.
- Competencia digital (CD). Implica, entre otras cosas, utilizar recursos tecnológicos para la comunicación y resolución de problemas y tener la curiosidad y la motivación por el aprendizaje y la mejora en el uso de las tecnologías. La unidad contribuye al desarrollo de esta competencia al llevar a cabo actividades con el software *GeoGebra*.
- Competencia de aprender a aprender (CAA). Implica, entre un conjunto de aspectos, conocer los procesos implícitos en el aprendizaje. Esta competencia se desarrolla mediante la competencia digital, ya que el software *GeoGebra* proporciona a los alumnos cierta autonomía para aprender por ellos mismos.
- Competencias sociales y cívicas (CSC). Implica, entre diversos aspectos, los siguientes:
    - Conocer códigos de conducta aceptados en distintas sociedades, contextos y situaciones.
    - Tener la habilidad de comunicarse de una forma constructiva en diferentes contextos y mostrar tolerancia.
    - Mostrar solidaridad y tener interés por la resolución de problemas.
    - Tomar parte de forma constructiva en los quehaceres de un grupo de personas.
    - Dejar atrás los prejuicios y aceptar las diferencias.
    - Tomar parte de la toma de decisiones.

  La unidad didáctica contribuye al desarrollo de esta competencia mediante la realización de una actividad por grupos en la que los estudiantes tendrán que comunicarse, mostrar solidaridad e interés, tomar parte en la actividad del grupo, aceptar las diferencias entre iguales, tomar decisiones, etc.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE). Implica, entre

otros, los siguientes aspectos:

- Capacidad de resolución de problemas.
- Capacidad de comunicar, presentar y negociar.
- Tener iniciativa e interés, ya sea en la vida social como en la profesional.

En cuanto a la capacidad de resolución de problemas, este aspecto queda implícito en la aplicación que tendrán que hacer los alumnos del Teorema de Pitágoras para resolver diversos problemas. Por su parte, la capacidad para comunicar, presentar y negociar y el hecho de tener iniciativa e interés son habilidades que se trabajan en la actividad en grupo.

6.5. Contenidos.

A continuación se reflejan los contenidos de esta unidad didáctica. Éstos son coherentes con los que aparecen en la *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016).

Los contenidos son los siguientes:

- Triángulos. Clasificación. Propiedades fundamentales.
- El Teorema de Pitágoras.
- Justificación geométrica del Teorema de Pitágoras.
- Punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras.
- Problemas de aplicación: cálculo de la hipotenusa o un cateto.
- Problemas de aplicación: polígonos regulares.
- Problemas de aplicación: figuras planas.

6.6. Metodología.

En este apartado se verán las metodologías que aparecen en las actividades de esta unidad didáctica. A la hora de elegir cuáles emplear, se han tenido en cuenta las que aparecen en:

- *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía* (Orden, 2016).

- Las investigaciones consultadas en el apartado 5 de la Fundamentación Didáctica de este Trabajo Fin de Máster.

A continuación se verán y comentarán cada una de las metodologías empleadas.

6.6.1. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Las estrategias metodológicas recomendadas por esta orden y que se emplean en esta unidad didáctica son las siguientes:

- *<u>En cada curso se deben repasar los contenidos del curso anterior</u>*. Se espera con esta estrategia metodológica de repaso que los estudiantes recuerden las propiedades fundamentales de los triángulos y su clasificación. Estos contenidos los vieron los alumnos en el anterior curso de 1º de ESO.

- *<u>Recursos tecnológicos</u>*. Los alumnos realizarán una actividad empleando el software *GeoGebra*. A partir de esta estrategia metodológica, los alumnos recordarán las propiedades fundamentales de los triángulos y su clasificación. Además, trabajarán en el desarrollo de la competencia digital (CD) y la competencia de aprender a aprender (CAA). El software antes mencionado dota a los alumnos de autonomía para aprender por ellos mismos.

- *<u>Juegos matemáticos y materiales manipulativos</u>*. El docente aplicará esta estrategia metodológica para llevar a cabo una actividad con regletas. Mediante dicha actividad, que se detallará en el apartado 6.7, los alumnos manipularán las regletas para justificar de forma geométrica el Teorema de Pitágoras. Es una metodología un tanto más lúdica para aumentar de esta forma la motivación del estudiante y para que éste aprenda haciendo, construyendo y "tocando" las matemáticas.

- *<u>Las calculadoras y el software específico deben convertirse en herramientas habituales</u>*. Como ya se ha comentado, el software *GeoGebra* se emplea para llevar a cabo una actividad de repaso con los alumnos. Por su parte, las calculadoras se emplean para realizar los cálculos de los problemas de aplicación del Teorema de

Pitágoras.

- *Uso de internet y de herramientas educativas, vídeos y películas sobre la vida y obra de los personajes matemáticos*. Esta estrategia metodológica se emplea para hacer ver a los alumnos el punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras y para que conozcan a grandes rasgos la vida y obra de este matemático.

- *En el bloque de Geometría es conveniente la experimentación a través de la manipulación y aprovechar las posibilidades que brindan los recursos digitales para construir, investigar y deducir propiedades*. En esta unidad didáctica se experimenta a través de la manipulación con la actividad manipulativa de las regletas que ya se ha comentado y con el software *GeoGebra* se investiga y deducen propiedades de los triángulos.

6.6.2. Estrategias metodológicas de las investigaciones consultadas.

En las investigaciones consultadas en el apartado 5 de la Fundamentación Didáctica del presente Trabajo Fin de Máster hay dos grandes estrategias metodológicas que se emplean en la unidad didáctica. Dichas estrategias son las siguientes:

- Según el artículo titulado *La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele* (Vargas & Gamboa, 2013), los estudiantes que emplearon el *GeoGebra* se sintieron más motivados a la hora de trabajar geometría que los estudiantes del enfoque tradicional. Los alumnos que trabajaron con la estrategia metodológica se sintieron motivados también a la hora de discutir ideas matemáticos con compañeros suyos que tenían mejores resultados académicas. Este es otro motivo por el cual se ha incluido el uso de este software en una actividad de la unidad didáctica.

- Según el artículo titulado *Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras* (Reyes Rodríguez et al., 2017), el hecho de no considerar importantes los aspectos históricos y epistemológicos de las matemáticas denota un reduccionismo didáctico. Por tal motivo, en una de las sesiones de la unidad didáctica se visualizarán unos vídeos en clase acerca de la vida y obra de Pitágoras. Además, para evitar el citado reduccionismo didáctico, se incluyen en la unidad didáctica diversas actividades de aplicación del teorema así como el uso del Geogebra y las regletas de Cuisenaire.

6.6.3. Otras estrategias metodológicas empleadas.

A parte de las estrategias metodológicas ya mencionadas se han empleado otras a lo largo de la unidad didáctica, las cuales son:

- Metodología de aprendizaje dialógico y colaborativo. La actividad manipulativa de las regletas es una actividad grupal en la que se aplica esta metodología para perseguir una profundización en los significados de los objetos matemáticos. Con ella se busca que los alumnos comprendan e interioricen tanto el Teorema de Pitágoras como su justificación geométrica.

- Metodología transmisiva. Se emplea cada vez que se quiere introducir un nuevo concepto matemático. En particular, esta metodología se implementa en la explicación del profesor de cómo aplicar el Teorema de Pitágoras al cálculo de un lado de un triángulo rectángulo, a polígonos regulares y a figuras planas. También se da cuando el docente explica el significado del Teorema de Pitágoras.

6.7. Actividades, recursos y temporalización.

Esta unidad didáctica del Teorema de Pitágoras se lleva a cabo en ocho sesiones. A continuación se detalla la distribución de los contenidos en dichas sesiones. También se desarrollan las actividades planteadas a los alumnos y los distintos recursos utilizados.

6.7.1. Sesión 1: Repaso. Clasificación de los triángulos. Propiedades fundamentales de un triángulo.

El objetivo de esta primera sesión es repasar los contenidos fundamentales que los alumnos vieron en el anterior curso de 1º de ESO. La primera mitad de la sesión se dedicará a repasar la clasificación de los triángulos. Por su parte, en la segunda mitad se recordarán las propiedades fundamentales de un triángulo. En esta sesión, los alumnos se desplazarán a la sala de ordenadores para usar como recurso el software *GeoGebra*.

Como se ha dicho, en la primera mitad de la sesión los alumnos se dedicarán a recordar la clasificación de los triángulos (*figura 19*).

figura 19. Extraído de Salvador et al (2014).

Para ello, el profesor comenzará explicando que los triángulos se pueden clasificar según sus lados o según sus ángulos, de acuerdo a la anterior figura 19. Una vez repasado esto, el profesor explicará cómo dibujar en *GeoGebra* un triángulo equilátero y un triángulo isósceles. Posteriormente, el profesor pedirá como tarea a realizar en esta sesión que los estudiantes dibujen cuatro triángulos más: escaleno, acutángulo, rectángulo y obtusángulo. Para ello, dará algo de tiempo y se acercará al puesto de aquel alumno que presente dificultades en realizar la actividad.

Una vez concluida esta primera mitad de la sesión, la segunda mitad la dedicará el profesor a recordar las siguientes propiedades fundamentales de un triángulo:

- La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.
- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60º.
- En un triángulo cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En primer lugar, una vez que el profesor explique que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, pedirá a los alumnos dibujar un triángulo cualquiera en *GeoGebra* y verificar que esta propiedad se cumple. Para ello, explicará cómo se miden ángulos en este software. Posteriormente explicará que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios y pedirá a los estudiantes comprobarlo con un triángulo rectángulo cualquiera dibujado por ellos en *GeoGebra*. Por su parte, una vez haya recordado a los discentes que los ángulos de un triángulo equilátero miden 60º, les pedirá el profesor comprobar esta propiedad con el software. Por último, se les explicará a los alumnos cómo medir la longitud de un segmento en *GeoGebra*, se les pedirá dibujar un triángulo cualquiera en este software y verificar la veracidad de la propiedad según la cual en un triángulo cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En caso de sobrar algo de tiempo en esta sesión, el profesor introducirá el contenido de la siguiente, el Teorema de Pitágoras.

6.7.2. Sesión 2: el Teorema de Pitágoras. Justificación geométrica.

En esta sesión 2, se explicará el Teorema de Pitágoras, se estudiará su justificación geométrica mediante cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo y se llevará a cabo una actividad colaborativa en grupo y manipulativa.

En primer lugar, el profesor comenzará la sesión explicando, en la pizarra del aula habitual de clase, que en un triángulo rectángulo los lados incidentes con el ángulo recto son los catetos y el otro lado es la hipotenusa.

Acto seguido, el docente hace saber a los estudiantes que calcular el cuadrado de un número es lo mismo que calcular el área de un cuadrado de lado dicho número. Por eso elevar a la potencia 2 es elevar al cuadrado.

Posteriormente, explicará a los estudiantes que el Teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de los catetos.

Una vez los estudiantes han recibido esta información, se procederá a realizar una actividad por grupos de tipo manipulativa con las regletas de Cuisenaire (figura 20).

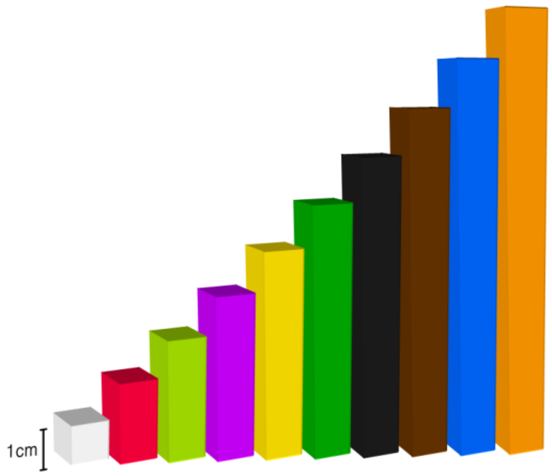


figura 20. Fuente: Wikipedia

Las regletas de Cuisenaire son un versátil juego matemático de manipulación idóneo para emplearlo en la escuela. Con él se pueden trabajar contenidos como operaciones básicas, áreas, volúmenes, fracciones, resolución de ecuaciones simples, raíces cuadradas, sistemas de ecuaciones, etc.

Este juego matemático consta de una serie de regletas en forma de prisma que tienen la siguiente longitud en centímetros: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. El ancho de todas las regletas es de 1cm, así como su profundidad.

En cuanto a la actividad a realizar, el profesor dividirá la clase en grupos de cuatro alumnos (o más si el aula lo permite). A cada grupo le entregará un juego de regletas. El profesor, de forma transmisiva, irá explicando el procedimiento a llevar a cabo en la actividad.

El docente pedirá a los grupos que cojan las regletas de longitudes 3, 4 y 5 centímetros. Después explicará que éstas deben colocarse tal y como se muestra en la siguiente figura 21 (longitud en centímetros). La disposición de las regletas mostradas en dicha figura será dibujada por el profesor en la pizarra.

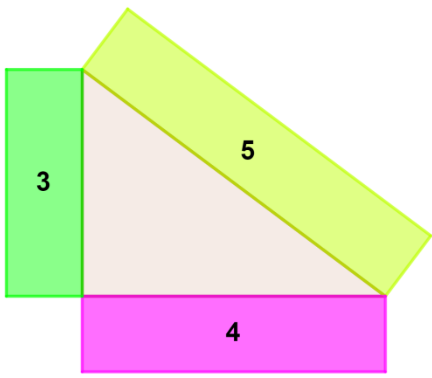


Figura 21

El profesor hace ver a los alumnos que mediante estas tres regletas se ha formado un triángulo rectángulo, es decir, mediante la terna (3, 4, 5), que es una terna pitagórica, se puede formar un triángulo rectángulo. Los estudiantes deben verificar entonces que se cumple el Teorema de Pitágoras, comprobando que $5^2 = 4^2 + 3^2$.

A continuación, el profesor hará ver a los alumnos que el objetivo es formar cuadrados sobre cada lado del triángulo. Los estudiantes deben entender que la idea es formar un cuadrado con tres regletas de 3 cm de longitud, un segundo cuadrado con cuatro regletas de 4 cm y un tercer cuadrado con cinco regletas de 5 cm de longitud. Así, pedirá colocar, bajo la regleta de longitud 4 cm, tres regletas más iguales a ésta. A la izquierda de la regleta de longitud 3 cm se deberán colocar otras dos iguales a ésta. Por último, sobre la regleta de 5 cm hay que colocar cuatro regletas adicionales de esta misma longitud. La disposición de todas estas regletas puede verse en la siguiente figura 22 (longitud en centímetros), la cual será dibujada por el profesor en la pizarra.

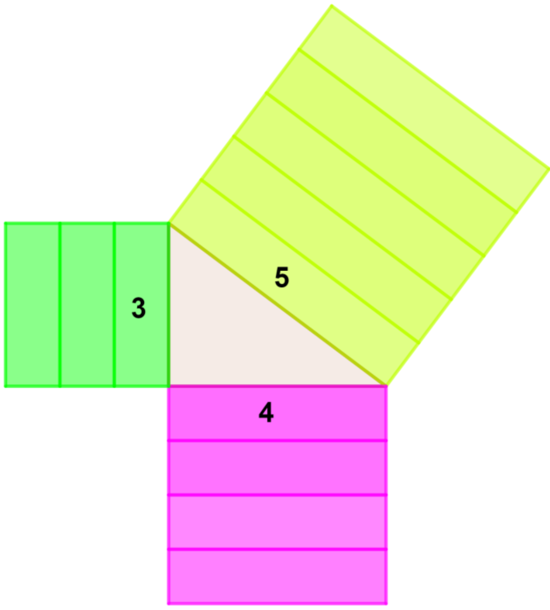


Figura 22

Así, una vez que el profesor haya plasmado esta figura 22 en la pizarra, los alumnos la replicarán con las regletas. El docente irá comprobando grupo por grupo que la construcción se ha hecho correctamente.

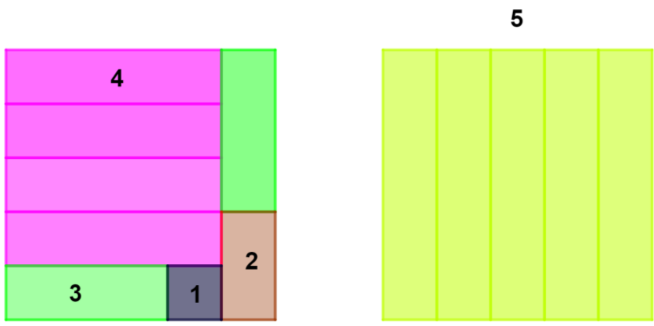
Acto seguido, el profesor recuerda a los alumnos el Teorema de Pitágoras, escribiendo en la pizarra su expresión algebraica asociada: $a^2 = b^2 + c^2$, con a la longitud de la hipotenusa y b y c las longitudes de los catetos.

En este momento, el docente hará ver a los estudiantes que a^2 es el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, b^2 el área del cuadrado construido sobre un cateto y c^2 el área del cuadrado construido sobre el otro cateto. Posteriormente, se asegurará de que todos comprenden que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Así mismo, el profesor comunicará a los alumnos que dichos cuadrados acaban de ser construidos por ellos mediante las regletas (figura 22). De esta forma, el docente recuerda a los estudiantes que con las regletas usadas para formar los cuadrados construidos sobre los catetos deberían formar un cuadrado de igual área que el construido sobre la hipotenusa. Cabe resaltar que simplemente habrá que cambiar una regleta de longitud 3 cm por una regleta de longitud 2 cm y otra de longitud 1 cm. También puede cambiarse la regleta de longitud 3 cm por tres regletas de 1 cm como es lógico.

Ahora el profesor propondrá a los alumnos comprobar por ellos mismos la igualdad de áreas mencionada. Cada grupo tendrá que construir un cuadrado de igual área que el construido sobre la hipotenusa utilizando las regletas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

El profesor dejará un determinado tiempo a los grupos de alumnos y, transcurrido éste, dibujará la solución en la pizarra (figura 23).



Cuadrado construido con las regletas de los catetos.

Cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Figura 23

Puede verse que los dos cuadrados de esta figura son iguales y, por tanto, tienen igual área. Se comprueba así que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Acto seguido, el profesor se asegurará de que los alumnos comprenden la idea que subyace en esta actividad, que es la justificación geométrica del Teorema de Pitágoras.

A continuación el docente propondrá una nueva actividad por grupos. El profesor escribirá en la pizarra varias ternas de números. Con cada terna se puede formar un triángulo de forma que, si la terna dada es (a, b, c), el triángulo a formar tendrá de lados (a, b, c). Así, los alumnos, para cada terna escrita en la pizarra por el profesor, tendrán que formar un triángulo con las regletas. En caso de dar con una terna pitagórica, los estudiantes tendrán que formar un cuadrado sobre cada lado del triángulo rectángulo con las regletas. Después, con las regletas de los cuadrados construidos sobre los lados de los catetos, tendrán que construir un cuadrado de igual área que el construido sobre la hipotenusa.

Si en algún caso los discentes obtienen un triángulo no rectángulo deberán comprobar que la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños no es igual al área del cuadrado grande. De esta forma estarían dando argumentos matemáticos de los resultados con un contraejemplo.

Si sobrase algo de tiempo de la sesión, el docente podría introducir la temática de la siguiente clase: punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras.

6.7.3. Sesión 3: punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras. Cálculo de un lado de un triángulo rectángulo.

En esta tercera sesión se comenzará hablando acerca del punto de vista histórico de Pitágoras y del Teorema de Pitágoras para, finalmente, explicar cómo se calcula un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

En primer lugar, el profesor mostrará el siguiente vídeo de YouTube (primera mitad únicamente, la segunda es adecuado solo para alumnos con altas capacidades), el cual relata la vida de Pitágoras, habla acerca de las escuelas que formó y cuenta cómo Platón rescató sus enseñanzas tras su muerte:

https://www.youtube.com/watch?v=LcwCFxy_4KM

Posteriormente, el docente reproducirá un segundo vídeo en el que se muestran triángulos rectángulos en nuestra vida cotidiana y se habla acerca de la vida de Pitágoras y de los pitagóricos:

https://www.youtube.com/watch?v=bGnj9DNPNOg

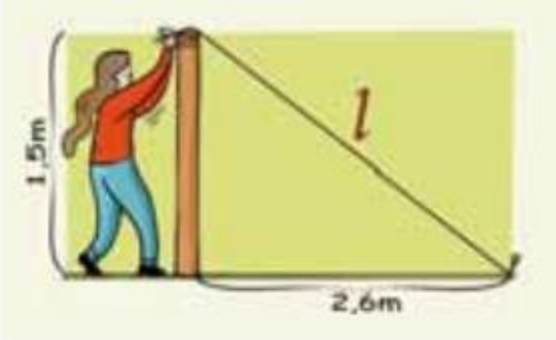
Una vez se hayan visualizado ambos vídeos, el profesor comentará el contenido de éstos a los alumnos.

Terminada esta primera parte de la sesión, el docente explicará en la pizarra de forma transmisiva cómo hallar cualquier lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

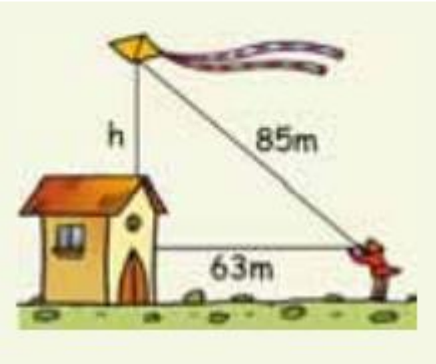
Después, se propondrán varios problemas de aplicación en los que se tendrá que hallar la longitud de algún lado del triángulo rectángulo. Estos problemas serán realizados en la pizarra por un alumno con la ayuda del docente y del resto de sus compañeros.

Algunos de estos problemas de aplicación podrían ser los siguientes.

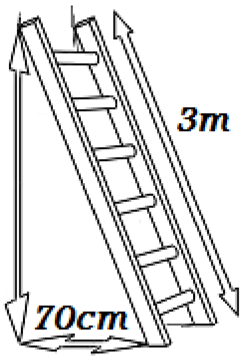
- *Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm, calcula su área y la longitud de la hipotenusa. (Área de un triángulo: $A = b \cdot h/2$, con b la base y h la altura).* (López et al., 2012).
- *Calcula la longitud del cateto restante en los triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto: a) 27 cm y 12 cm, b) 32 m y 21 m, c) 28 dm y 12 dm y d) 79.2 km y 35.6 km*. (Salvador et al., 2014.)
- *Para sujetar un poste de 1.5 m de alto se utiliza una cuerda atada a 2.6 m de distancia desde la base del poste. Hallar la longitud de esta cuerda*. (Colera et al., 2008).



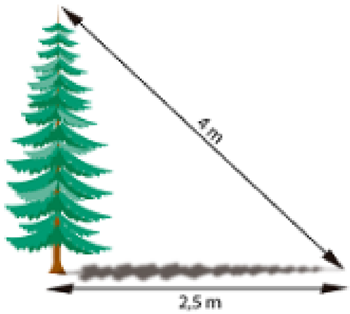
- *La cuerda de un cometa está a 85m de Lucía. El cometa vuela justo encima de una caseta. Dicha caseta está a 63 m de Lucía. ¿A qué altura vuela el cometa?* (Colera et al., 2008).



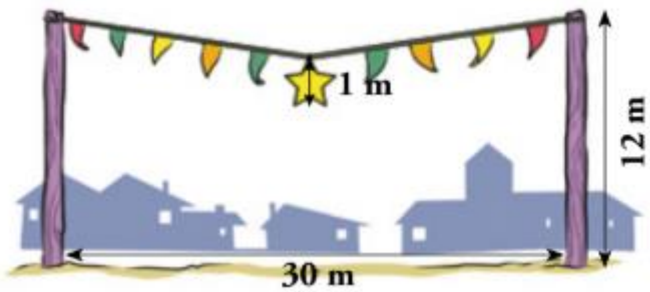
- Calcula la altura que se puede alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si su parte inferior se sitúa a 70 centímetros de ésta. (Llopis, 2010).



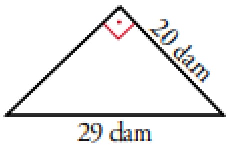
- Pepe viaje 5 km al norte y 6 km al oeste con respecto a su vivienda para llegar a su destino. ¿Cuál es la distancia mínima desde su vivienda a su destino? (Fuente: elaboración propia).
- Luis quiere saber la altura de un árbol. Observa que éste proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si sabemos que la distancia desde el pico del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol? (Llopis, 2010).



- En las fiestas de un pueblo, cuelgan una estrella de 1 m de altura en medio de una cuerda de 34 m que está atada a los extremos de dos postes de 12 m separados 30 m entre sí. ¿A qué distancia del suelo queda la estrella? (Colera et al., 2008).



- *Hallar la longitud del cateto desconocido.* (Colera et al., 2008).



- *Los catetos de un triángulo rectángulo miden 33 m y 27 m. Halla la longitud de la hipotenusa aproximando hasta los centímetros.* (Colera et al., 2008).

El docente podría mandar como tarea para casa más problemas de este tipo.

6.7.4. Sesión 4: aplicación del Teorema de Pitágoras a polígonos regulares.

Esta cuarta sesión comienza con la corrección de los problemas que el profesor mandó para casa en la clase anterior.

Hecho esto, el docente explicará en la pizarra de forma teórica las distintas aplicaciones que tiene el Teorema de Pitágoras en los polígonos regulares. Algunas de dichas aplicaciones son:

- Calculo de la altura de un triángulo equilátero conociendo el lado.
- Cálculo del radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono (u otro polígono regular) conociendo el lado y la apotema.
- Cálculo del radio de una circunferencia conociendo la longitud de una cuerda y la distancia del centro a dicha cuerda.
- Cálculo del lado de un polígono regular conociendo el radio de la circunferencia circunscrita y la apotema.

Una vez la teoría quede explicada en la pizarra, el profesor planteará diversos problemas que se resolverán a lo largo de toda la sesión. Los alumnos irán saliendo a la pizarra a resolverlos con la ayuda del docente y de sus compañeros. Algunos de estos problemas pueden ser:

- *La apotema de un hexágono regular mide 3 cm. ¿Cuánto mide el lado?* (Fuente: elaboración propia).
- *Calcula el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado 10 cm*. (López et al., 2012).
- *Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 1 dm.* (López et al., 2012).

- *Calcula la apotema de un octógono de lado 4 cm y radio de la circunferencia circunscrita 8 cm.* (López et al., 2012).
- *La diagonal de un cuadrado mide 5,66 dm. ¿Cuánto mide el lado?* (López et al., 2012).

El profesor podría mandar como tarea para casa la realización de más problemas de este tipo.

6.7.5. Sesión 5: aplicación del Teorema de Pitágoras a figuras planas.

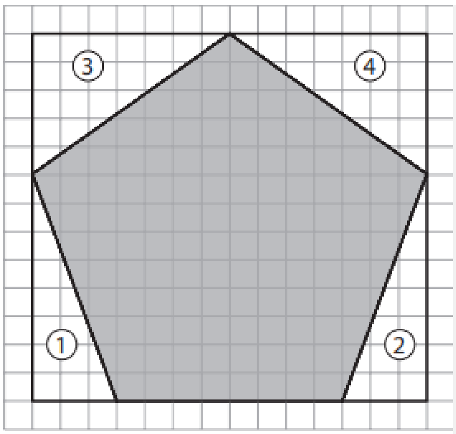
Esta quinta sesión comienza con la corrección de los problemas que el profesor mandó para casa en la clase anterior.

Una vez hecho esto, el docente explicará de forma teórica la aplicación del Teorema de Pitágoras a figuras planas. Dicha aplicación puede llevarse a cabo en las siguientes situaciones:

- Cálculo de la diagonal de un rectángulo conocida su base y su altura.
- Cálculo del lado de un rombo conocidas sus diagonales.
- Cálculo de la altura de un trapecio rectángulo conocidos el resto de lados.
- Conocidas las bases de un trapecio isósceles y su altura, cálculo de su perímetro.

Terminada la explicación, el resto de la sesión se dedicará a la realización de problemas en la pizarra. Como en clases anteriores, un alumno saldrá a resolver el problema y el docente y sus compañeros le ayudarán. Algunos de estos problemas podrían ser:

- *Calcula el perímetro de la siguiente figura.*



(López et al., 2012).

- *Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 12 cm y el lado desigual 10 cm*. (López et al., 2012).
- *Las diagonales de un rombo miden 24 cm y 32 cm*. *Calcula la medida de los lados, el área y el perímetro.* (López et al., 2012).
- *Calcula el área del trapecio cuyas bases miden 26 cm y 20 cm, y sus otros dos lados miden 5 cm*. (López et al., 2012).
- *La base de un rectángulo mide 20 cm y su altura 10 cm*. *Calcula su diagonal.* (Fuente: elaboración propia).
- *Hallar la altura de un trapecio rectángulo*. Sus bases miden 43 m y 28 m. El lado oblicuo mide 25 m. (Colera et al., 2008).

6.7.6. Sesión 6: pre-examen.

Esta sexta sesión se dedicará a la realización de problemas muy similares a los que aparecerán en el examen. Los alumnos separarán sus mesas y trabajarán de forma individual en una hoja de problemas que el profesor repartirá. Dichos problemas corresponden con unas actividades finales y de recopilación maquetadas en forma de prueba escrita.

El profesor resolverá las dudas de los estudiantes que presenten mayor dificultad. No obstante, intentará en la medida de lo posible no presentar en primera instancia la solución final del problema, sino guiar al alumno hacia ésta.

Esta sesión consta de diversas finalidades:

- que el alumno se familiarice con el tipo de problemas que se encontrará en el examen,
- que el profesor se percate de dónde radican las carencias de sus alumnos y
- que el docente obtenga una idea del nivel de la clase que le permita definir por completo los ejercicios que aparecerán en el examen.

El pre-examen deberá tener problemas asociados a los siguientes contenidos del tema:

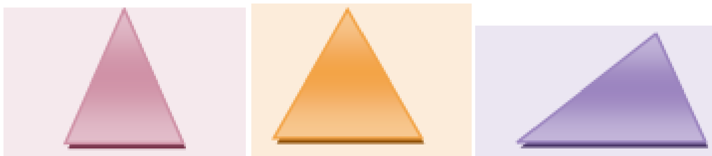
- Clasificación de triángulos.
- Justificación geométrica del Teorema de Pitágoras.
- Punto de vista histórico del Teorema de Pitágoras.
- Cálculo de uno de los lados de un triángulo rectángulo conociendo

los otros dos.

- Aplicación del Teorema de Pitágoras a polígonos regulares.
- Aplicación del Teorema de Pitágoras a figuras planas.

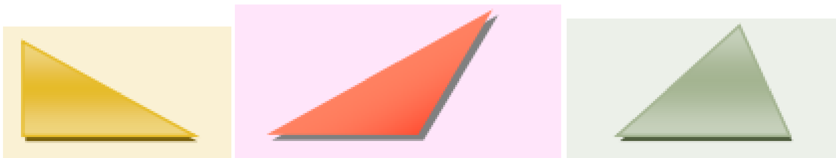
A continuación se presenta un ejemplo de pre-examen.

1. *Clasifica los siguientes triángulos según sus lados. (1 punto).*



(Salvador et al., 2014)

2. *Clasifica los siguientes triángulos según sus ángulos. (1 punto).*



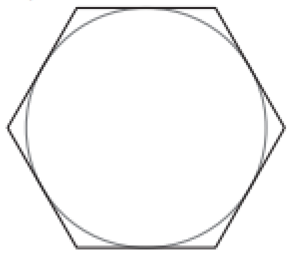
(Salvador et al., 2014)

3. *Dado un triángulo rectángulo, supón que el área del cuadrado construido sobre su hipotenusa es de 25 m^2. Si el área del cuadrado construido sobre uno de sus catetos vale 9 m^2, ¿cuánto valdrá el área del cuadrado construido sobre el otro cateto? (1 punto).* (Fuente: elaboración propia).

4. *¿Qué filósofo griego rescató las enseñanzas de Pitágoras después de su muerte y las legó a la posteridad? (1 punto).* (Fuente: elaboración propia).

5. *Una escalera mide 10 m de largo y se apoya a una pared. El extremo superior de la escalera, que está en contacto con dicha pared, se encuentra a una altura de 8 m sobre el suelo. ¿Cuál es la distancia entre la pared y el extremo inferior de la escalera? (2 puntos).* (López et al., 2012).

6. *En una caja con forma de hexágono regular de 10 cm de lado se quiere guardar una tarta con forma circular. ¿Cuál es el radio de la tarta más grande que se puede almacenar en esta caja? (2 puntos).* (López et al., 2012).



7. *Calcula el perímetro de un rombo si las diagonales miden 4 dm y 12 dm*. (2 puntos). (López et al., 2012).

Como se puede observar, en este pre-examen se trabajan todos los contenidos. Consta de siete preguntas. Las primeras cuatro, asociadas a la clasificación de triángulos, la justificación geométrica del Teorema de Pitágoras y su punto de vista histórico, valen un punto cada una. Las tres últimas preguntas son problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras. Un problema es del cálculo de un cateto conocidos los otros dos lados, otro es de un hexágono regular y el último de un rombo. Con estos tres problemas se aplica el Teorema de Pitágoras al cálculo de un lado del triángulo rectángulo conocidos los otros dos, a polígonos regulares y a figuras planas. Estos problemas valen dos puntos cada uno.

Puede verse que más de la mitad de la puntuación de la prueba recae sobre los problemas.

6.7.7. Sesión 7: corrección del pre-examen y resolución de dudas.

Esta séptima sesión se dedicará a la corrección del pre-examen. El docente irá haciendo los ejercicios en la pizarra y empleará un mayor tiempo en los aspectos en los que los estudiantes hayan tenido una mayor dificultad.

Concluida esta parte de la sesión, el profesor preguntará dudas sobre cualquier aspecto del tema. Estas dudas se resolverán en la pizarra.

Posteriormente se le dará la posibilidad a los alumnos de trabajar en la pizarra cualquier problema que ellos quieran plantear. Si los estudiantes no proponen nada, el docente planteará y hará problemas similares a los que aparecerán en el examen.

6.7.8. Sesión 8: examen.

En esta octava y última sesión se realizará el examen del tema. Esta prueba será uno de los elementos del proceso de evaluación del alumnado.

La estructura de esta prueba será igual que la del pre-examen.

A lo largo de la sesión, el profesor estará a disposición de resolver cualquier duda que suponga una dificultad a algún alumno para entender lo que un determinado ejercicio le está pidiendo.

6.8. Atención a la diversidad.

A lo largo de un curso académico y, también a lo largo de los años, la distinta tipología de alumnado es muy variada. Por tal motivo, el currículo debe diseñarse de tal forma que posibilite adaptaciones curriculares a aquellos estudiantes que las necesiten.

La *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado* (Orden, 2016), establece que el profesorado, con ayuda de una evaluación inicial y con la consulta del departamento de orientación, adoptará las medidas oportunas para atender a la diversidad presente en el alumnado. Dichas medidas deberán aparecer en las programaciones didácticas y en el proyecto educativo del centro.

En la presente unidad didáctica pueden hacerse adaptaciones curriculares a los alumnos que las precisen. A continuación se comentan algunas de ellas.

6.8.1. Alumnado con dificultades respecto al progreso esperado.

En cuanto al desarrollo de esta unidad didáctica con un grupo de alumnos en los que ciertas personas presenten dificultades con respecto al progreso esperado, se verá a continuación la adaptación de las actividades planteadas a lo largo de las sesiones:

- Actividad con *GeoGebra*. En el caso de que por la situación particular del alumno con necesidades especiales éste no pudiera seguir la clase mediante el uso de *GeoGebra*, el docente podría presentarle la clasificación de los triángulos rectángulos mediante una fotocopia en la que aparezca la anterior figura 19. El objetivo sería simplemente que el estudiante conozca la clasificación de triángulos. Una vez conseguido esto, si el alumno se animase a reproducir estos triángulos en *GeoGebra*, aunque no fuera al mismo ritmo que el resto de sus compañeros, el resultado de la sesión sería aún más positivo.
- Actividad con regletas. Teorema de Pitágoras. El objetivo de esta sesión para este tipo de alumnado es que tengan claro el enunciado del Teorema de Pitágoras y sepan justificarlo geométricamente, sin necesidad de desenvolverse con soltura en el uso de las regletas. De

esta forma, el docente puede proporcionar material de refuerzo a estos estudiantes para asegurarse que comprenden el Teorema de Pitágoras y, si es posible, su justificación geométrica.

- Problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras. Al trabajar con alumnado con dificultades, es más importante en esta unidad didáctica que tengan perfectamente claro y entiendan el Teorema de Pitágoras y su justificación geométrica que el hecho de que sean capaces de aplicarlo a un determinado problema. Por ello, a estos estudiantes se les valorará en mayor medida que sepan clasificar triángulos, que comprendan el Teorema de Pitágoras y su justificación geométrica y que conozcan la vida y obra de Pitágoras. Si se esperase de ellos la realización de problemas, éstos serían de aplicación directa y muy básicos.

6.8.2. Alumnado con capacidades por encima de las esperadas en el grupo.

A continuación se presentan algunas de las medidas a tomar en las actividades presentadas en esta unidad didáctica con los alumnos con capacidades por encima de las esperadas:

- Tras la sesión con *GeoGebra*, a estos alumnos se les puede dar un material que miren en casa en el que se explique qué es la altura, la mediana, la bisectriz y la mediatriz de un triángulo. De esta forma, ellos en casa, mediante este software o a mano, pueden dibujar triángulos y estudiar en ellos los segmentos mencionados.

- Tras la sesión en la que se explica el Teorema de Pitágoras y se realiza la actividad de las regletas, a este tipo de estudiantes se les puede dar material adicional que revisen en casa. Dicho material puede consistir en diversas demostraciones del Teorema de Pitágoras. A continuación se detalla una demostración de tipo geométrico que puede servir. Véase la siguiente figura 24.

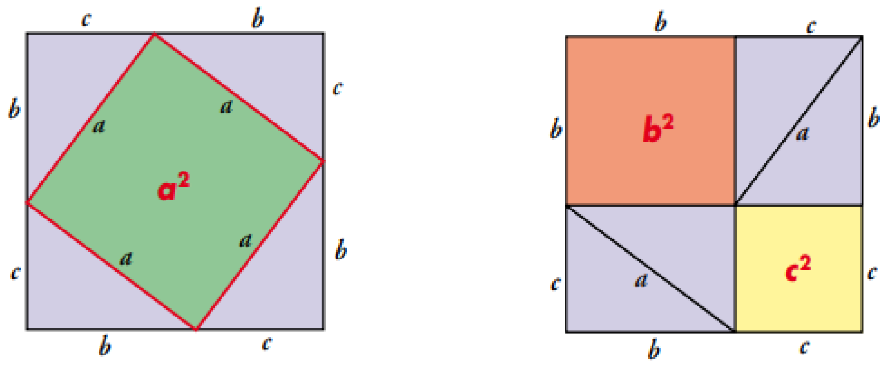


Figura 24. Extraído de Colera et al. (2008).

Si se procede a realizar un análisis, puede verse que se tienen dos cuadrados de lado $b + c$. El cuadrado de la izquierda está formado por cuatro triángulos rectángulos iguales y otro cuadrado de lado a. Por su parte, el cuadrado de la derecha está formado por los mismos cuatro triángulos rectángulos y dos cuadrados de lados b y c.

Si de cada puzle quitamos los cuatro triángulos rectángulos, queda:

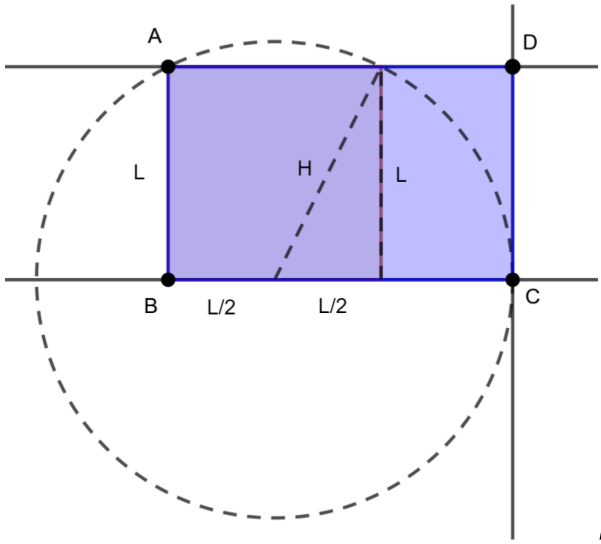
- El cuadrado de área a^2 en el de la izquierda.
- Dos cuadrados de área b^2 y c^2 en el de la derecha.

De esta forma, debe cumplirse que $a^2 = b^2 + c^2$. Por su parte, a es la hipotenusa de los triángulos rectángulos y b y c los catetos. Queda demostrado entonces el Teorema de Pitágoras.

- En cuanto a la sesión en la que se visualizan en clase videos de la vida y obra de Pitágoras, estos alumnos podrían leer información extra en casa acerca del pitagorismo y los pitagóricos.

- Por último, además de la realización en casa de los problemas, a este tipo de alumnado se le puede dar material extra de aplicación del Teorema de Pitágoras. Por ejemplo, en dicho material podría verse algo de rectángulos áureos y podría explicarse lo siguiente:

  Un rectángulo áureo es aquel en el que al dividir su lado mayor entre su lado menor, el resultado da $(1 + \sqrt{5})/2$. Su construcción aparece en la siguiente figura. En primer lugar, se dibuja un cuadrado de lado L. El lado inferior de dicho cuadrado se divide por la mitad en dos segmentos de longitud $L/2$. El punto medio del lado inferior se une con el vértice superior derecho, obteniendo un segmento de longitud H. Posteriormente, se traza una circunferencia de centro el punto *medio mencionado y radio H.*



Fuente: elaboración propia

Esa circunferencia corta a la prolongación del lado inferior del cuadrado en el punto C. Desde C se traza la vertical, la cual corta a la prolongación del lado superior del cuadrado en D. Así, el rectángulo $ABCD$ es áureo.

Por otro lado, la aplicación del Teorema de Pitágoras se incluye en la demostración de que el rectángulo $ABCD$ es áureo. Veamos dicha demostración.

Hay que probar que

$$\frac{H+\frac{L}{2}}{L}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$H^2=L^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2=L^2+\frac{L^2}{4}=\frac{5}{4}L^2\ .$$

$$H=\frac{\sqrt{5}}{2}L\ .$$

Sustituyendo esta última expresión de H en función de L en la expresión inicial se tiene:

$$\frac{H+\frac{L}{2}}{L}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}L+\frac{L}{2}}{L}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .\ \blacksquare$$

6.9. Evaluación.

La evaluación al alumnado brinda información muy importante acerca de dos aspectos.

En primer lugar, hace saber al profesorado el nivel de asimilación de conocimientos que ha tenido lugar en los alumnos.

En segundo lugar, el docente puede medir su capacidad de transmitir un determinado saber y si su labor de enseñanza la ha realizado de forma adecuada.

6.9.1. Contenidos de la evaluación.

En relación con el qué evaluar, es necesario basarse en los criterios de evaluación que aparecen en la *Orden de 14 de julio de 2016* (Orden, 2016) para la asignatura de matemáticas de 2º de ESO. Por su parte, se debe tener en cuenta el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (Real Decreto, 2014) en el que aparecen los estándares de aprendizaje evaluables asociados.

Para la presente unidad didáctica, hay que tener en cuenta un criterio de evaluación que está en relación con los objetivos y contenidos de la misma, el cual es el siguiente:

3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

Este criterio de evaluación consta de dos estándares de aprendizaje evaluables, los cuales son:

3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

6.9.2. Procedimiento de evaluación.

Cada alumno será evaluado mediante la siguiente estructura porcentual:

- **Participación: 20%**. En las sesiones de problemas, los alumnos pueden ofrecerse voluntarios a realizar un problema en la pizarra con la ayuda del docente y del resto de sus compañeros. Si algún estudiante no se ofreciera, el profesor lo animaría a ganar este porcentaje de la nota final.

Esta puntuación también podría ser adquirida mediante una actitud positiva y unas ganas notables de aprender: consulta de dudas al profesor, aportaciones realizadas en clase mientras otro compañero hace un problema en la pizarra, buena actitud hacia los compañeros en la actividad grupal, etc.

- **Actividades: 20%**. El docente puede encomendar a los alumnos como tarea la realización de una o varias actividades que les serán entregadas. Dichas actividades serán problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras.
- **Examen**: **60%**. La realización de la prueba individual evaluable corresponderá al 60% de la nota final del alumno.

La intención de estos porcentajes de evaluación es que más de la mitad de la nota recaiga sobre el examen, dando la importancia que se merece a esta prueba escrita.

Sin embargo, también es importante tener en cuenta la participación y la realización de actividades, razón por la que se evalúan estas dos partes con un 20% cada una de la nota final.

7. CONCLUSIONES.

A continuación se llevará a cabo una valoración del proceso de elaboración del presente Trabajo Fin de Máster, se hará un breve resumen del mismo y se estudiará en qué medida esto ha motivado el desarrollo de algunas competencias profesionales.

Este trabajo versa sobre el Teorema de Pitágoras en distintos aspectos: fundamentación curricular (conexión con el currículum); fundamentación epistemológica en la que aparece su demostración a partir del Teorema del Cateto; fundamentación didáctica en la que se analizan investigaciones sobre obstáculos didácticos frecuentes en el aprendizaje y la enseñanza del Teorema de Pitágoras y propuesta de una unidad didáctica. En ésta última se ha intentado dar solución a los problemas aflorados en las investigaciones mediante el software informático GeoGebra y las regletas de Cuisenaire para aproximar los conceptos geométricos de una forma más manipulativa y palpable. Al mismo tiempo esto ha facilitado el hecho de que los alumnos expresen verbalmente sus razonamientos matemáticos. Así mismo, se ha dado importancia al contexto histórico para la mejor comprensión del concepto y se ha buscado una red de conceptos asociados, relacionando el Teorema de Pitágoras a multitud de situaciones. De esta forma, dicho teorema se ha aplicado no solo como una expresión algebraica, sino como una herramienta para resolver problemas de la vida real que contribuirá a los discentes a desarrollar competencias útiles de cara a su futuro fuera de las aulas.

Por otro lado, las principales contribuciones que la realización de este TFM ha tenido sobre mi formación como futuro profesor de matemáticas han sido:

- La indagación y la adquisición de unas nociones sobre el valor histórico del Teorema de Pitágoras.
- La adquisición del conocimiento de algunas propuestas didácticas.
- Las destrezas para la creación de programas de actividades a partir de los currículos vigentes.
- La adquisición de criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
- El conocimiento de las posibilidades de aplicación de herramientas audiovisuales y de contenido multimedia.
- El conocimiento de estrategas y técnicas de evaluación.
- La adquisición de destrezas que permitan aplicar propuestas docentes innovadoras.

- El conocimiento de alternativas de aprendizaje destinadas al alumnado con necesidades especiales.
- La capacidad de planificar un proceso de enseñanza en la asignatura de matemáticas.
- El entendimiento de la existencia de diversidad entre el alumnado.
- La capacidad de búsqueda y transmisión de información y de transformar ésta en conocimiento.
- La capacidad de participar en el futuro en la creación del currículo que se vaya a aplicar en un determinado centro escolar.
- La adquisición de las competencias necesarias para crear y poner en práctica metodologías didácticas enfocadas en la diversidad de los estudiantes.

En definitiva, todas estas contribuciones que el presente TFM ha tenido sobre mi formación como futuro docente suponen el colofón de los estudios y la enseñanza recibida durante el Máster de Secundaria.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Barrios Calmaestra, L., Cassinello Espinosa, A., Cañas Escamilla, J. J., Galo Sánchez, J. R., Martín Cano, M., Ramírez García, C., Rodríguez Villanego, F. J., Ruíz Gil, C. (2009). *2º e.s.o. matemáticas.* Recuperado de https://www.matematicasonline.es/cidead/libros/2eso/Libro_Matematicas_2ESO.pdf .

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics., Nueva York, EEUU: John Willey & Sons.

Colera Jiménez, J. Gaztelu Albero, I. Colera Cañas, R. (2008). *Matemáticas 2 ESO.* España: Anaya Educación.

Llopis, J. (2010). *Teorema de Pitágoras*. Recuperado de https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html .

López, C. Martínez, B. Montesinos, P. González, F. (2012). *Matemáticas 2 ESO.* España: McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, BOE, 312, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.

Orden de 14 de julio de 2016, BOJA, 145, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica, Volumen I,* Madrid, España: Euler Editorial S.A.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, BOE, 3, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Rey Pastor, J. Puig Adam, P. (1933). *Elementos de geometría racional, Tomo I, Geometría plana*, Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Reyes Rodríguez, A.V. Rondero Guerrero, J.A. Campos Nava, M. Torres Rodríguez, A.A. (2017). *Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras.* Bolema, Rio Claro (SP), 31(59), 968-983.

Salvador, A. et al. Matemáticas 2º de ESO. (2014). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2ESO.pdf.

Vargas Vargas, G. Gamboa Araya, R. (2013). *La enseñanza del Teorema de*

Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. UNICIENCIA, 27(1), 95-118.

Whitworth, W. A., Taylor, C., & Glaisher, J. W. L. (Eds.). (1866). The Messenger of Mathematics.. (Vol. 3). Cambridge, Inglaterra: Macmillan and Co.