Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Grado en Finanzas y Contabilidad

Universidad de Jaén
Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

CÁLCULO FINANCIERO Y VISUALIZACIÓN GRÁFICA CON MATHEMATICA.

Alumno: Sergio Anguís Gutiérrez

Enero, 2022

ÍNDICE

1. RESUMEN

El objetivo de mi trabajo de fin de grado es el análisis del marco teórico y práctico del cálculo financiero que he estudiado a lo largo de estos cuatro años de carrera. Además de exponer gráficamente unos ejemplos relacionados con la materia analizada a través de la aplicación Mathematica.

En primer lugar, aparece la definición de operación financiera, equivalencia financiera, ley financiera y su clasificación.

En segundo lugar, se exponen las dos leyes de capitalización, simple y compuesta, donde aparecen su definición, expresión matemática y representación gráfica.

En tercer lugar, se estudian las diferentes leyes financieras de descuento, diferenciando el descuento comercial y el descuento racional.

En cuarto lugar, se encuentran las definiciones del tipo de interés nominal, efectivo y la tasa anual equivalente.

En quinto lugar, se estudian las rentas financieras. Se pueden ver su definición, clasificación, sus principales propiedades y su valor financiero.

En sexto lugar, se lleva a cabo el estudio de los préstamos. Aparecen la definición, sus variables más significativas y se analizan el préstamo a través de un solo pago y el préstamo por el método francés.

En el trabajo se exponen diferentes figuras gráficas que permiten ver claramente lo que se expresa, además de tablas, cuadros y ejemplos relacionados con los temas tratados.

En el siguiente punto aparecen las principales instrucciones utilizadas con Mathematica y los correspondientes ejemplos.

Por último, se exponen las conclusiones que he sacado del trabajo realizado y la bibliografía donde indico los principales libros y fuentes que me han ayudado a realizar el proyecto.

2. ABSTRACT

The objective of my final degree work is the analysis of the theoretical and practical framework of financial calculation that I have studied throughout these four years of career. In addition to graphically displaying examples related to the subject matter analysed through the Mathematica application.

First, there is the definition of financial transaction, financial equivalence, financial law and its classification.

In the second place, the two laws of capitalization, simple and composite, are exposed, where their definition, mathematical expression and graphic representation appear.

Third, the different financial discount laws are studied, differentiating commercial and rational discount.

Fourthly, there are the definitions of the nominal interest rate, the cash rate and the annual equivalent rate.

Fifth, financial income is studied. You can see its definition, classification, main properties and financial value.

Sixth, the study of loans is carried out. The definition, its most significant variables appear and the loan is analysed through a single payment and the loan through the French method.

The work presents different graphic figures that allow you to see clearly what is expressed, as well as tables, tables and examples related to the topics discussed. The next item shows the main instructions used with Mathematica and the corresponding examples.

Finally, the conclusions I have drawn from the work done and the bibliography where I list the main books and sources that have helped me to carry out the project are presented.

3. OPERACIONES FINANCIERAS.

3.1 CONCEPTO.

Una operación financiera se puede definir como cualquier intercambio no simultáneo de capitales financieros, en el que se verifica la equivalencia financiera entre los compromisos de las partes intervinientes.

De acuerdo con esta definición, una operación financiera se caracteriza por los siguientes elementos:

- Los capitales financieros que intervienen en la operación. Un capital financiero se puede definir como "la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento" [Gil Peláez (1993), *Matemática de las operaciones financieras, Editorial AC*]. Así, para determinar un capital financiero se deben considerar dos parámetros, la cuantía "*C*" y la disponibilidad o vencimiento "*t*". Desde el punto de vista matemático se representa por un par ordenado de números reales (C,t). La cuantía, C, debe ser siempre positiva para que tenga sentido, esto es, $C > 0$.

Los capitales financieros que intervienen en una operación financiera se pueden agrupar en dos conjuntos: la prestación la contraprestación. El primero está formado por todos los capitales de la parte que entrega el primer capital en el intercambio. Por el contrario, la contraprestación está formada por todos los capitales de la parte que recibe el primero de ellos.

- El intercambio de los capitales que constituyen la prestación y la contraprestación se realiza a lo largo de un periodo de tiempo. El origen de la operación financiera es el momento en que se entrega el primer capital y el final de la operación financiera es el momento en que se entrega el último capital. El tiempo que media entre el origen y el final es la duración de la operación financiera.
- Las partes son las personas (físicas o jurídicas) que intervienen en la operación.
- El conjunto de capitales que conforman la prestación y los que lo hacen para la contraprestación han de ser financieramente equivalentes de acuerdo con la ley financiera pactada por las partes. Una Ley financiera se puede definir como "la expresión matemática del criterio de sustitución que permite, dado un capital de cuantía C con vencimiento en t, obtener su cuantía equivalente (*V*) en el momento *p*" [Damián de la Fuente (2006), *Valoración de las operaciones financieras, Editorial Universitaria Ramón Areces*]. Si el momento "*p*" es posterior al momento "*t*", se habla de Ley Financiera de Capitalización. Si es "*p*" anterior, se denomina Ley Financiera de Descuento.

3.2 EQUIVALENCIA FINANCIERA Y LEY FINANCIERA

Siendo (C_1,t_1) y (C_2,t_2) dos capitales financieros, son equivalentes, cuando, valorados en un mismo momento de tiempo, tienen una igual cuantía. Para averiguar si dos capitales financieros son equivalentes, es necesario aplicarles una ley financiera determinada que permita valorar ambos capitales en un momento determinado de tiempo.

Esta ley financiera viene expresada por:

$$V = f(C, t, p)$$

Siendo:

V = Valor equivalente del capital (C,t) en el momento de tiempo p

f = Ley Financiera determinada

C = Cantidad del capital financiero en el momento de tiempo t

t = Instante de tiempo en el que se define el capital financiero (C,t)

p = Momento de comparación.

Aplicando la ley financiera, con dos capitales determinados (C_1,t_1) y (C_2,t_2), si se demora el cobro del capital 1, C_1, desde el momento t_1 hasta el momento p (con valor V_1), se obtendría la misma cuantía de capital que si se demora el cobro del capital 2, desde el momento t_2 hasta el momento p (con valor V_2). Esto es, $V_1 = V_2$

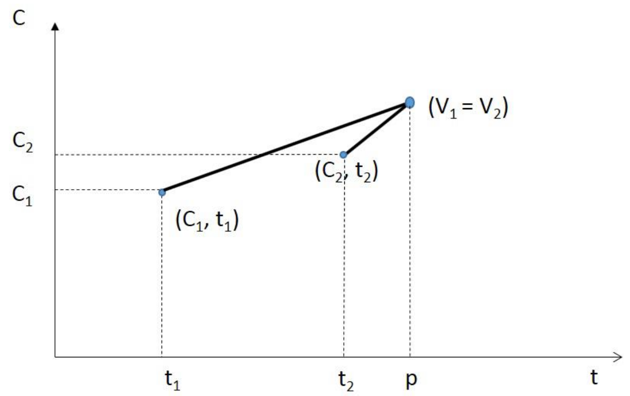


Figura 1: *Representación gráfica de la equivalencia financiera con dos leyes financieras distintas*

3.3 CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS.

Las operaciones financieras se pueden clasificar en varios grupos en función del criterio que se elija:

1) Ley financiera utilizada:

- Capitalización: Se utiliza en su valoración una ley financiera de capitalización.
- Descuento: Se utiliza en su valoración una ley financiera de descuento.

- Mixtas: En su valoración se utilizan las leyes de capitalización y de descuento.

2) Duración:

- Corto plazo: La duración es inferior a un año.
- Largo plazo: La duración es superior al año.

3) Número de capitales:

- Simples: La prestación y la contraprestación están formadas por un solo capital.
- Compuestas: La prestación y/o la contraprestación están formadas por más de un capital.

4) Situación crediticia:

- Crédito unilateral: La prestación mantiene una posición acreedora durante toda la operación.
- Crédito recíproco: La prestación tiene una posición deudora en algún momento de la operación.

5) Partes intervinientes:

- Bancarias: Una de las partes es una entidad financiera.
- No bancarias: Las dos partes son personas físicas o jurídicas.

3.4 EJEMPLO 1

Teniendo dos capitales financieros (1.000€, 2 meses) y (1.500€, 6 meses), aplicando las siguientes leyes financieras:

a) $f(C,t,p) = 1 + 0{,}75 \times (p - t)$

Comprobamos la equivalencia en 1 año (12 meses), realizando el siguiente cálculo:

$V_1 = C_1 \times f(t_1, p) \rightarrow V_1 = 1000€ \times [1 + 0{,}75 \times (12 - 2)] = 8500€$

$V_2 = C_2 \times f(t_2, p) \rightarrow V_2 = 1500€ \times [1 + 0{,}75 \times (12 - 6)] = 8250€$

Al ser $V_1 > V_2$, no existe equivalencia financiera, siendo preferible el capital 1 (1.000€) al momento 1 (2 meses).

b) $f(C,t,p) = 1 + 0{,}25 \times (p - t)$

Comprobamos la equivalencia en 1 año (12 meses), realizando el siguiente cálculo:

$V_1 = C_1 \times f(t_1, p) \rightarrow V_1 = 1000€ \times [1 + 0{,}25 \times (12 - 2)] = 3500€$

$V_2 = C_2 \times f(t_2, p) \rightarrow V_2 = 1500€ \times [1 + 0{,}25 \times (12 - 6)] = 3750€$

Al ser $V_2 > V_1$, no existe equivalencia financiera, siendo preferible el (C_1 = 1.000€, t_1 = 2 meses) al (C_2 = 1.500€, t_2 = 6 meses).

c) $f(C,t,p) = 1 + 0{,}5 \times (p - t)$

Comprobamos la equivalencia en 1 año (12 meses), realizando el siguiente cálculo:

$V_1 = C_1 \times f(t_1, p) \rightarrow V_1 = 1000€ \times [1 + 0{,}5 \times (12 - 2)] = 6000€$

$V_2 = C_2 \times f(t_2, p) \rightarrow V_2 = 1500€ \times [1 + 0{,}5 \times (12 - 6)] = 6000€$

Al ser $V_1 = V_2$, los capitales son equivalentes.

4. LEYES FINANCIERAS DE CAPITALIZACIÓN.

La ley financiera de capitalización nos permite encontrar el equivalente financiero de un capital financiero (*C,t*) en un instante de tiempo "*p*" posterior al instante "*t*" que lo define. Según los criterios que consideramos para definir la ley, se clasifican en leyes financieras de capitalización simple y de capitalización compuesta.

4.1. CAPITALIZACIÓN SIMPLE.

4.1.1. CONCEPTO, EXPRESIÓN MATEMÁTICA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

La capitalización simple se define como aquella ley financiera de capitalización que no permite que los intereses generados en un periodo de tiempo intermedio se agreguen al capital inicial para generar nuevos intereses en el siguiente periodo de tiempo.

Su expresión matemática es la siguiente:

$$L_1(C,t,p) = C(1 + i \cdot (p - t)) \quad con \quad p > t \quad e \quad i > 0$$

"*La capitalización simple se establece como una ley financiera estacionaria, en el sentido de que sólo tiene en cuenta el tiempo que media entre el vencimiento "t" del capital financiero (C,t) y el momento "p" de comparación de la operación financiera*" (Damián de la Fuente, 2006). Como consecuencia, al aplicar este tipo de leyes, el valor significativo es el del tiempo interno z de la operación (siendo $z = p - t$).

Podemos escribir la ecuación anterior, para una unidad monetaria, como:

$$L_1(z) = 1 + i \cdot z \ , \ \mathrm{i} > 0 \quad \text{donde:}$$

- i es el tipo de interés o tanto o incremento por unidad de cuantía y unidad de tiempo.
- z representa la amplitud del intervalo de tiempo durante el que se capitaliza la unidad monetaria ($z = p - t$).

Esta expresión quiere decir que si se capitaliza una unidad monetaria (*C=1*) durante z periodos de tiempo, el capital equivalente es igual a: $1 + i \cdot z$.

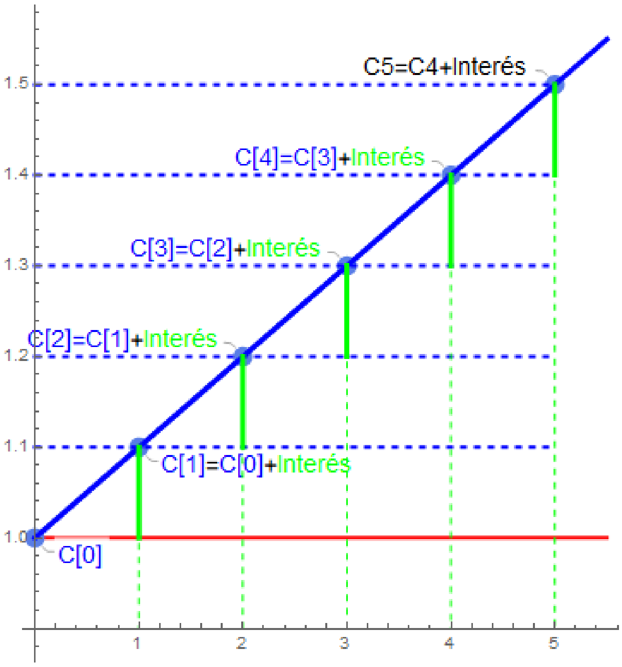


Figura 2: *Representación gráfica, utilizando Mathematica, de la evolución del montante para una unidad monetaria capitalizándola durante 5 periodos al 10% de interés simple.*

Cuando se trabaja con la Ley de Capitalización Simple hay que tener en cuenta dos aspectos fundamentales:

- Sólo se tiene en cuenta el tiempo interno de la operación o intervalo durante el cual se capitaliza o se traslada el capital (*z*).

- El parámetro *i* (o tanto de interés) y la amplitud del intervalo de capitalización (z) han de expresarse en la misma unidad de medida del tiempo.

El gráfico de la capitalización simple para una unidad monetaria se corresponde con una función lineal del tiempo que se representa mediante una recta creciente con validez en el primer cuadrante y ordenada en el origen igual al capital inicial "*C*".

Si medimos el tiempo interno de la operación en el eje de abscisas y el resultado de la capitalización para un capital de cuantía unitaria en el eje de ordenadas, la recta representativa, cuya pendiente es la tasa de interés, tiene la representación gráfica que se muestra en la figura 3:

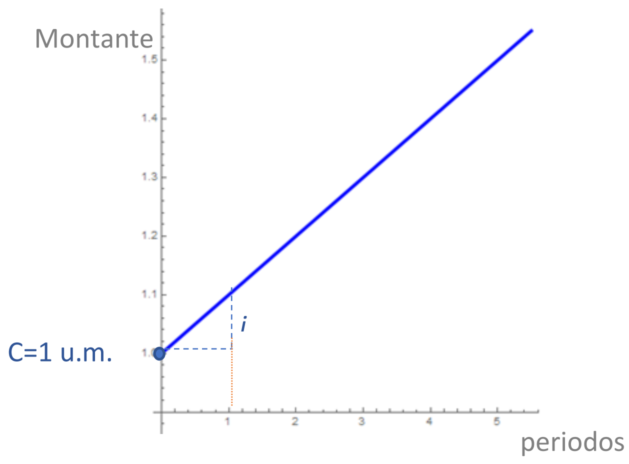


Figura 3: *Evolución del montante al capitalizar 1 u.m de forma simple, a un tanto i. en función del número de periodos de capitalización*

4.2. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA.

4.2.1. CONCEPTO, EXPRESIÓN MATEMÁTICA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

La capitalización compuesta se define como aquella ley financiera que permite que los intereses generados en un periodo de tiempo se agreguen al capital inicial para generar nuevos intereses en el siguiente periodo de tiempo.

La expresión matemática de la capitalización compuesta es la siguiente:

$$L_2(t,p) = (1+i)^{p-t} \quad con \quad p > t \quad e \quad i > 0$$

Al ser la capitalización compuesta una ley estacionaria, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$L_2(z) = (1+i)^z \quad con \quad z = p - t \quad e \quad i > 0 \quad \text{donde:}$$

- *i* representa tipo de interés, o tanto, o incremento, por unidad de cuantía y unidad de tiempo.
- *z* representa la amplitud del intervalo de tiempo durante el que se capitaliza la unidad monetaria.

El significado de esa expresión es que si se capitaliza una unidad monetaria (*C=1*) durante *z* períodos de tiempo, el capital equivalente es igual a $(1+i)^z$.

Al igual que ocurría con la capitalización simple es necesario advertir dos cuestiones, a la hora de trabajar con este tipo de leyes:

- Sólo se tiene en cuenta el tiempo interno, ***z***, de la operación o intervalo durante el cual se capitaliza o se traslada el capital hacia la derecha.

- El parámetro *i* (o tanto de interés) y la amplitud del intervalo de capitalización (z) han de expresarse en la misma unidad de medida.

La representación gráfica de la capitalización compuesta es una función exponencial, que al tener la base mayor que la unidad, genera una curva creciente y convexa. Se analiza en la Figura 4 su evolución y cómo, periodo a periodo se van acumulando una cantidad mayor de intereses (segmentos en verde).

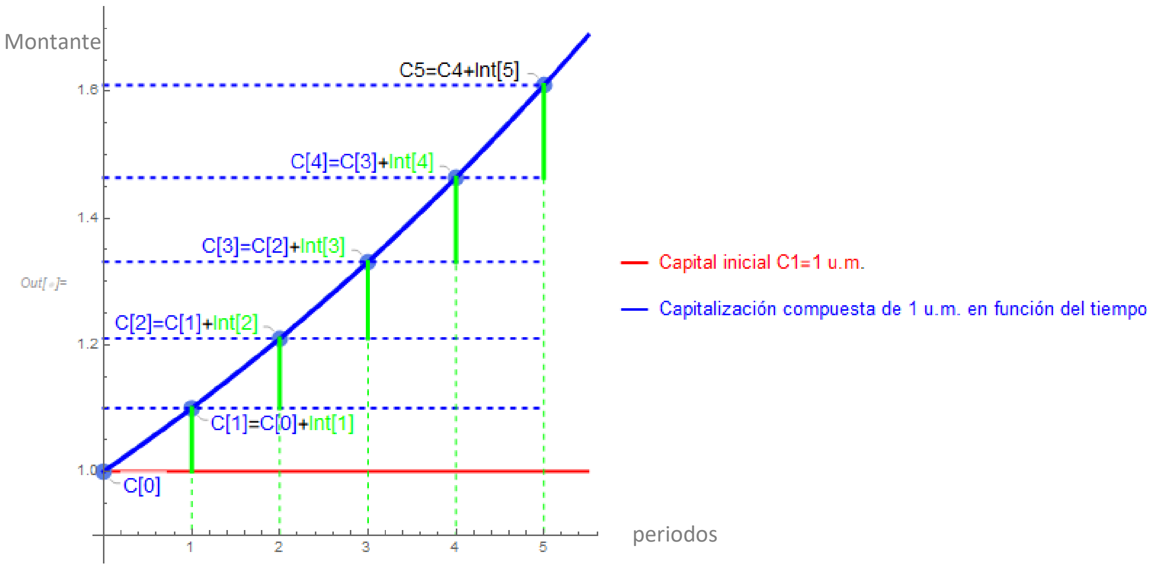


Figura 4: *Evolución del montante al capitalizar 1 u.m de forma compuesta, a un tanto i. en función del número de periodos de capitalización diferenciando el capital acumulado y los intereses generados en cada periodo.*

5. LEYES FINANCIERAS DE DESCUENTO.

Las operaciones financieras de descuento se basan en anticipar el vencimiento de un capital futuro determinado. Se trata de una operación opuesta a la capitalización, donde en lugar de evaluar los intereses que hay que añadir para compensar el aplazamiento de uso del capital, se deducen los intereses que hay que descontar por adelantar la distribución del capital. El descuento es la diferencia entre el capital futuro y el capital anticipado, donde, además:

$$Descuento = Capital \times Tipo\ de\ interés \times Tiempo$$

Dependiendo si nos referimos al capital futuro o al capital adelantado, existen dos tipos de descuento, el comercial y el racional, respectivamente.

Además, dependiendo de la forma de cálculo de los intereses, estos pueden de tipo de interés simple o de tipo de interés compuesto. Se dividen en 4 tipos:

- Descuento comercial simple o a tanto anticipado
- Descuento comercial compuesto o a tanto anticipado
- Descuento racional simple o a tanto vencido
- Descuento racional compuesto o a tanto vencido

5.1 DESCUENTO COMERCIAL SIMPLE.

5.1.1 EXPRESIÓN MATEMÁTICA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La expresión matemática del descuento comercial simple, para un capital financiero (*C*,*t*) y representando *p* el instante de tiempo al que se va a actualizar el capital (*C*,*t*), es:

$$A_1(C,t,p) = C(1 - d \cdot (t - p)) \;\; con \;\; t > p \;\; y \;\; d > 0$$

Dado que el descuento comercial es una ley financiera estacionaria, podemos escribir la ecuación anterior, considerando que se actualiza una unidad monetaria (*C=1*) como:

$$A_1(z) = 1 - d \cdot z \;\; con \;\; z = t - p \;\; y \;\; d > 0$$

Donde:

- *d* representa el tipo de descuento, o tanto, o disminución, por unidad de cuantía y unidad de tiempo.
- *z* representa la amplitud del intervalo de tiempo durante el que se descuenta la unidad monetaria.

De acuerdo con esta ley, el capital equivalente que obtenemos al descontar una unidad monetaria durante z períodos de tiempo es igual a *1- d · z*. En la Figura 5 se representa la evolución del capital efectivo con esta Ley de Descuento Simple Comercial:

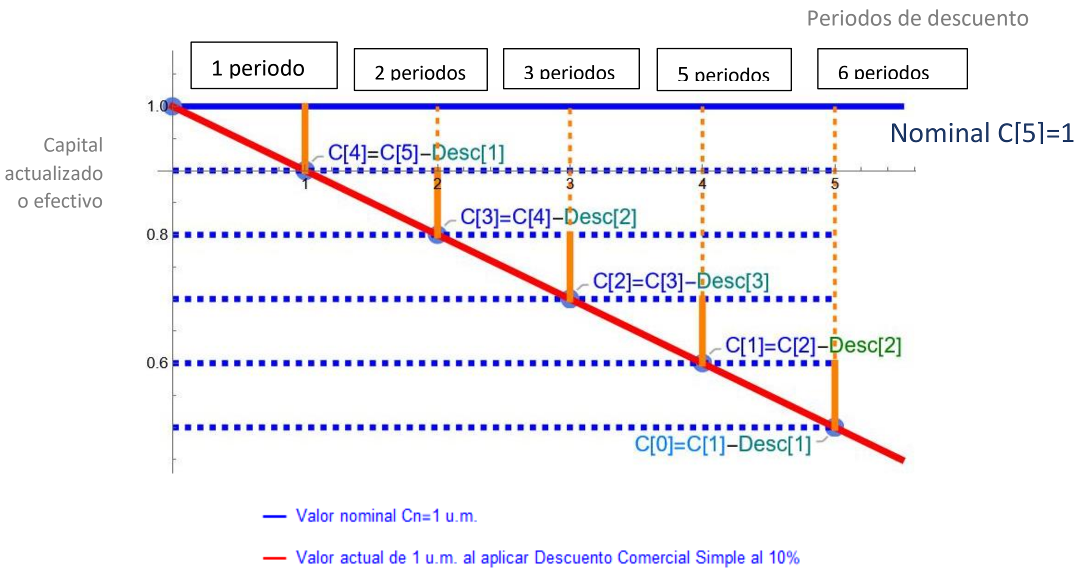


Figura 5: *Evolución del capital actualizado de 1 u.m. al descontarlo en función de los periodos de tiempo por los que se actualiza*

Al igual que ocurría en capitalización, es muy importante observar que cuando se trabaja con la ley de descuento comercial sólo se tiene en cuenta el tiempo interno de la operación z o intervalo temporal durante el cual se descuenta el capital. Por otro lado, el parámetro d (o tanto de descuento) y el intervalo de descuento (t,p) han de expresarse en la misma unidad de medida.

La representación gráfica del efectivo obtenido después de aplicar la ley de descuento comercial simple a 1 u.m. se corresponde con la de una función lineal decreciente con el tiempo. Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Si\ z = 0 \quad \rightarrow \quad A_1(0) = 1$$

$$Si\ A_1(z) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - d * z = 0 \ \rightarrow \ z = \frac{1}{d}$$

Si medimos el tiempo interno de la operación en el eje de abscisas y el resultado del descuento para un capital de cuantía unitaria en el eje de ordenadas, la recta representativa del descuento comercial se muestra en la Figura 6:

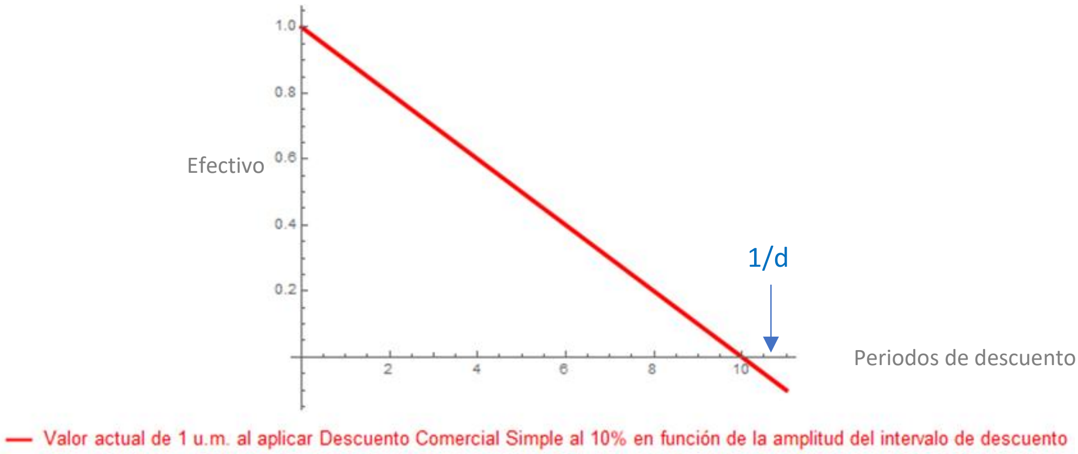


Figura 6. *Gráfica del efectivo obtenido tras descontar 1 u.m. en función del tiempo*

Tal como se observa en la Figura 6, la ley de descuento comercial tiene un intervalo de tiempo de validez. Desde un punto de vista financiero, la aplicación de esta ley sólo tiene sentido cuando el período de descuento está comprendido entre 0 y 1/d.

5.2. DESCUENTO RACIONAL O DESCUENTO MATEMÁTICO SIMPLE.

5.2.1. EXPRESIÓN MATEMÁTICA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

La expresión matemática de la ley de descuento racional para un capital financiero (C,p) que se traslada a un instante de tiempo, t, anterior a su vencimiento es la función inversa de la capitalización simple (cambian la situación de t y p en relación a la operación de capitalización). Así, para C=1 u.m.:

$$A_2(t,p) = \frac{1}{1 + i \cdot (t - p)} \quad con \quad t > p \quad e \quad i > 0$$

Al ser una ley estacionaria, para una unidad monetaria, se puede escribir de esta forma:

$$A_2(z) = \frac{1}{1 + i \cdot z} \quad con \quad z = t - p \quad ; \quad i > 0$$

Donde:

- i representa el tanto de descuento o tanto o decremento por unidad de cuantía y unidad de tiempo.
- z representa la amplitud del intervalo temporal durante el que se descuenta la unidad monetaria.

La notación del parámetro que representa al descuento en esta Ley, i, que aparece en la expresión de la ley de descuento racional coincide con la notación del parámetro de tanto de interés, i, que aparece en la expresión de la ley de capitalización simple. Esto es así para indicar el significado de que si una unidad monetaria se descuenta con esta ley y el resultado se capitaliza durante el mismo periodo de tiempo, se obtiene la unidad monetaria de partida.

De nuevo, y al igual que ocurría con las leyes anteriormente vistas, es necesario, al operar con la ley de descuento racional, mantener la concordancia entre la unidad de medida del tanto de descuento y el tiempo de descuento.

La representación gráfica del descuento racional es una curva decreciente puesto que al aumentar el intervalo de descuento (z), el resultado del efectivo tras la aplicación de la ley, va disminuyendo. Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$z = 0 \; \rightarrow \quad A_2(0) = \frac{1}{1 + i \cdot 0} = 1$$

$$A(z) = 0 \; \rightarrow \quad \frac{1}{1 + z \cdot i} = 0$$

No existe z para el que $\frac{1}{1+z \cdot i} = 0$, por tanto, nunca se alcanza el valor 0 para el efectivo obtenido aplicando esta Ley Financiera de Descuento racional simple. La curva no corta nunca el eje de abscisas, aunque si el periodo te tiempo es suficientemente amplio, el efectivo obtenido estará próximo a cero:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{1 + z \cdot i} = 0$$

Representando gráficamente el efectivo obtenido con esta Ley, para una unidad monetaria, a un tanto i=10% durante 5 periodos, se obtiene la gráfica que se muestra en la Figura 7:

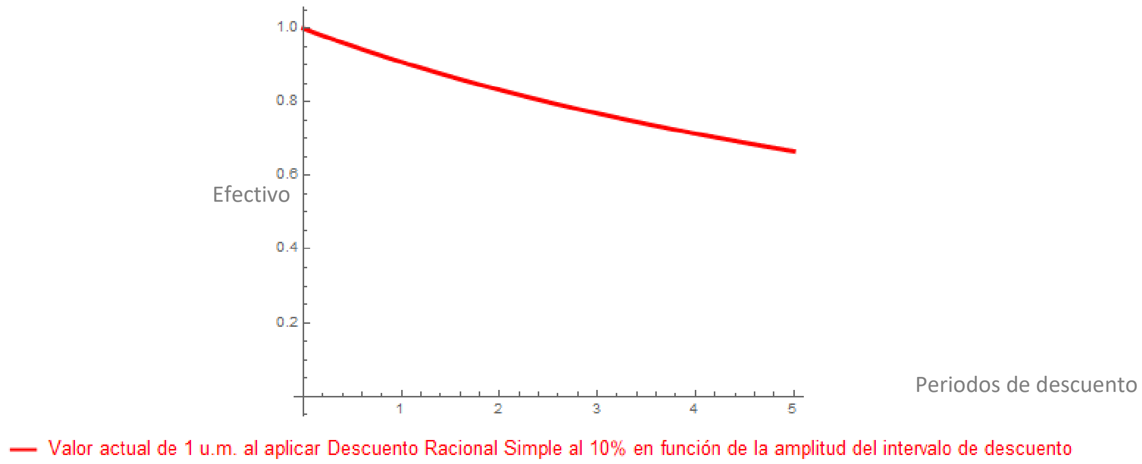


Figura 7: *Curva de la función racional (decreciente en función del número de periodos) que representa el efectivo que se obtiene al descontar 1.u.m. con una Ley de Descuento Simple Racional con i=10%*

5.3 DESCUENTO COMPUESTO.

5.3.1 DESCUENTO RACIONAL COMPUESTO

5.3.1.1 EXPRESIÓN MATEMÁTICA Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Para un capital financiero (*C*,*t*) que se actualiza a un instante de tiempo, *p*, anterior al de su vencimiento, *t*, a un tanto *i*, tiene la siguiente expresión:

$$A_3(C,t,p) = C(1+i)^{-(t-p)} \quad con\, t > p \quad e \quad i > 0$$

En su forma estacionaria, para el descuento de una unidad monetaria y, siendo *z* la amplitud del intervalo para el que se descuenta esa unidad monetaria, adopta la siguiente expresión:

$$A_3(z) = (1+i)^{-z} \quad con\, z = t - p \quad e \quad i > 0$$

5.3.2 DESCUENTO COMERCIAL COMPUESTO

Para un capital financiero (*C*,*t*) que se actualiza a un instante de tiempo, *p*, anterior al de su vencimiento, *t*, también se puede utilizar una Ley de Descuento Compuesto, llamada comercial. Su expresión matemática en su modo estacionario y para el descuento de una unidad monetaria, adopta la siguiente forma:

$$A_3(z) = (1-d)^z \quad con\, z = t - p \quad y \quad 0 \leq d < 1$$

La representación gráfica del descuento compuesto es una curva decreciente al ser su expresión matemática una función exponencial de base menor que la unidad y exponente positivo. Los puntos significativos y características de estas funciones y sus gráficas serían:

$$z = 0 \;\rightarrow\; A_3(0) = 1$$

$$z = 1 \;\rightarrow\; A_3(1) = (1 - d)$$

$$A_3(z) \neq 0 \; excepto \; si \; d = 100\%$$

$$A_3(z) = 1 \;\; si \; d = 0\%$$

$$\lim_{z \to \infty} A_3(z) = 0 \;\; \text{para} \;\; 0 < d < 1$$

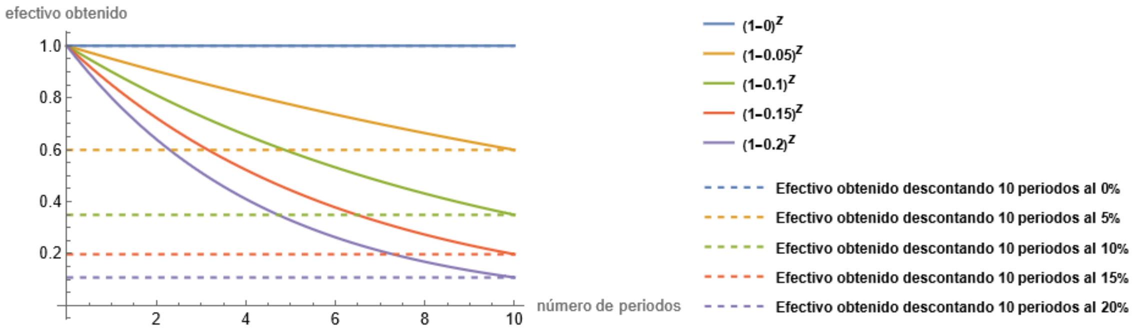


Figura 8: *Gráficas de la evolución del efectivo obtenido al descontar 1 u.m. de forma comercial compuesta en función del número de periodos para distintos tantos de descuento "d" desde el 0% (no hay descuento) al 20% para el que, en 10 periodos, se obtiene un efectivo próximo a cero.*

Por otro lado, el significado de la notación de los parámetros como *i* (en el descuento racional) o *d* (en el comercial) que aparecen en sus respectivas expresiones es relevante e indica que la metodología que siguen cada una de las leyes de descuento compuesto es distinta. En el primer caso, se denota *i* al tanto de descuento porque realmente coincide con el tipo de interés o tanto en capitalización cuando se realiza la operación inversa. Sin embargo, en descuento comercial, denotamos como *d* al tipo de descuento. No coincidiría con "*i*" o tanto de interés si se realizara la operación inversa al descuento (esto es, si se capitalizara).

Si imponemos que el efectivo que se obtenga aplicando descuento comercial compuesto coincida con el que se obtendría aplicando descuento racional compuesto la relación que debería existir entre "i" y "d" sería:

$$(1+i)^{-z} = (1-d)^{z} \;\rightarrow\; (1+i)^{-1} = (1-d) \;\rightarrow\; \begin{cases} i = \dfrac{d}{1-d} \\ d = \dfrac{i}{1+i} \end{cases}$$

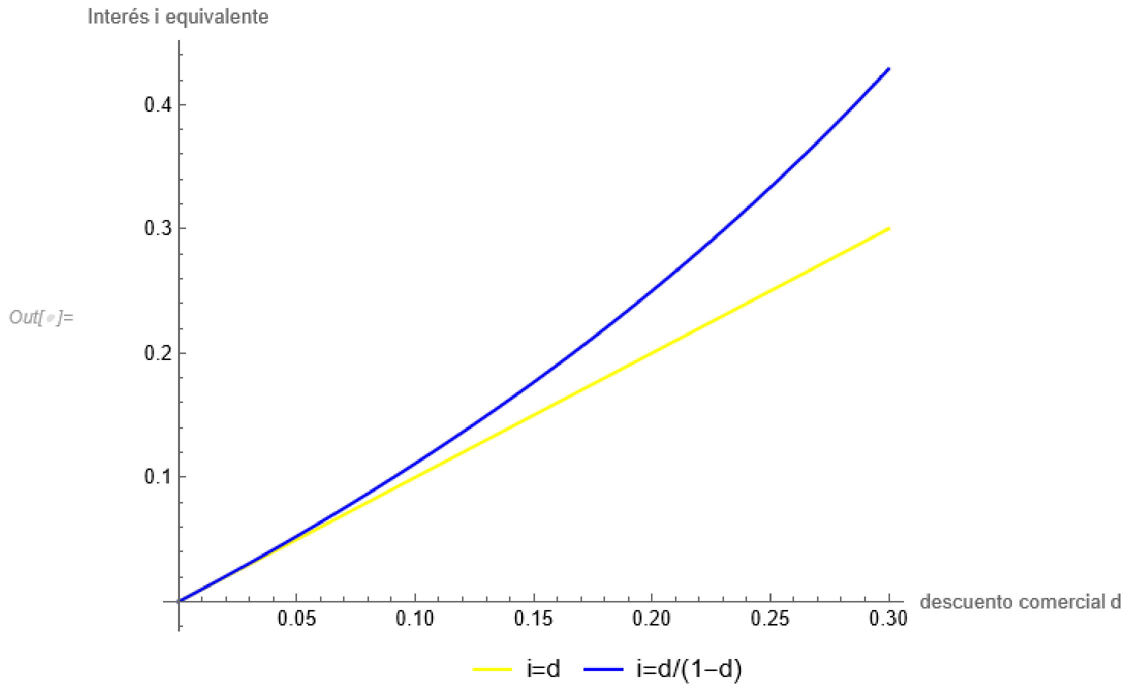


Figura 9: *Variación del interés equivalente "i" a la tasa de descuento "d" en función de la variación de esta tasa desde 0% a 30%.*

En la Figura 9 se ha representado la relación que debe existir para entre la tasa de descuento comercial aplicada y el interés que se debería aplicar para recomponer el capital descontado, $i = \frac{d}{1-d}$. Se observa cómo, i > d, y, por ejemplo, a partir de d=10%, se separa y aumenta considerablemente el tanto i que se debe aplicar.

6. TIPO DE INTERÉS NOMINAL Y TIPO DE INTERÉS EFECTIVO.

El tipo de interés nominal se refiera al porcentaje que se agrega al capital cedido como una remuneración por un tiempo determinado. Se define en relación a una unidad de tiempo. Para calcular la Tasa de Interés Nominal (TIN) se utiliza la siguiente expresión:

$$I = C \times i$$

Donde:

- I = Intereses devengados en una unidad de tiempo
- i = TIN (en la misma unidad de tiempo)
- C = Capital

Mientras tanto, el tipo de interés efectivo en capitalización simple se define para periodos fraccionarios inferiores a la unidad de tiempo en la que se define el TIN. Se calcula de la siguiente forma:

$$(1 + i_k) = \left(1 + \frac{i}{k}\right)$$

$$i_k = \frac{i}{k}$$

$$i = k \times i_k$$

Donde:

- i es el tipo de interés nominal
- i_k es el tipo de Interés Efectivo Equivalente
- k es el número de fracciones que hay en la unidad de tiempo en la que se define el TIN

En Capitalización Compuesta, para periodos fraccionarios inferiores a la unidad de tiempo en la que se define el TIN, la Tasa de Interés Efectivo (TIE) equivalente será:

$$(1 + i_k) = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$$

$$i_k = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$$

$$i = k \times [(1 + i_k)^{\frac{1}{k}} - 1$$

Donde:

- i es el tipo de Interés Efectivo
- i_k es el Tipo de Interés correspondiente a un periodo fraccionario
- k es el número de fracciones contenidas en la unidad de tiempo en la que se define el TIN

7. TASA ANUAL EQUIVALENTE

La Tasa Anual Equivalente (T.A.E.) es un indicador expresado en tanto por ciento anual que indica el coste o rendimiento efectivo de un determinado producto financiero. Está formado por el interés, los gastos y las comisiones bancarias. La diferencia con el tipo de interés es que incluye los gastos y las comisiones. Su cálculo se relaciona con el tipo de interés compuesto, ya que los intereses obtenidos se vuelven a invertir al mismo tipo de interés dado. Podemos referirnos al TAE de la siguiente manera:

Al capitalizar 1 u.m. al interés efectivo por periodo, i_j, durante un año (deduciendo *j* periodos por año) se obtiene que:

$$(1 + i_j)^j$$

Mientras que si se capitalizara a la tasa TAE durante un año:

$$(1+TAE)$$

Igualando ambas, para que sean equivalentes, y despejando TAE nos quedaría:

$$TAE=(1+i_j)^j-1$$

8. RENTAS FINANCIERAS.

8.1 CONCEPTO

Se entiende por renta financiera a un conjunto de capitales financieros cuyos vencimientos regulares están distribuidos sucesivamente a lo largo de un intervalo temporal.

Dado un intervalo general [t_0, t_n] que dividimos en sub-intervalos o períodos de maduración y un conjunto de capitales financieros [C_i, t_i], *(i=1,2,…,n)*, definimos renta como la aplicación biyectiva entre los dos conjuntos, de tal forma que a cada capital le corresponderá un período de maduración y viceversa.

Lo habitual es que cada capital se asocie o con el extremo inferior (rentas prepagables) o con el extremo superior (rentas pospagables) de cada sub-período.

A los capitales asociados a cada período de maduración se les denomina términos de la renta.

Al momento t_0, extremo inferior del primer sub-intervalo, se le denomina origen de la renta y al momento t_n, extremo superior del último sub-intervalo, se le denomina final de la renta. El tiempo que media entre el origen y el final de la renta se llama duración de la renta.

8.2 CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS.

En función del criterio que se utilice, podemos clasificar las rentas en los siguientes grupos:

a) Cuantía de los capitales:
   - Constantes: Las cuantías de los capitales que forman la renta son iguales. En el caso de que la cuantía sea la unidad (C=1), hablamos de rentas unitarias.
   - Variables: Las cuantías de los capitales que conforman la renta son distintas entre sí. En la práctica, lo habitual es que varíen de acuerdo a una progresión aritmética o según una progresión geométrica.

b) Momento en el que vencen los capitales:

- Pospagables: Los vencimientos de los capitales se encuentran al final de cada periodo.
- Prepagables: Los vencimientos de los capitales se localizan al principio de cada periodo de maduración.

En la práctica es posible encontrar rentas cuyos términos tengan su disponibilidad en momentos del tiempo diferentes de los extremos de los intervalos. En tales casos, podemos proceder a transformar dichas rentas en otras equivalentes con términos prepagables o pospagables.

c) Duración:

- Temporales: La duración de la renta es finita, es decir, se conoce tanto el origen como el final.
- Perpetuas: Se definen de esta forma cuando, para la renta, se conoce el origen, pero no el final. No hay ningún criterio que establezca cuando finalizará.

d) Medida de los períodos de maduración:

- Discretas: Cuando todos los períodos de la renta son finitos, pudiendo distinguir entre
    - Rentas de período uniforme. Cuando la amplitud de todos los periodos es la misma. También son conocidas como rentas anuales, mensuales, trimestrales, etc. En función de si la duración constante de sus periodos sea por años, meses, trimestres…
    - Rentas de período no uniforme. Cuando al menos la amplitud de un período es diferente.
- Continuas: Los períodos de la renta son de amplitud infinitesimal, es decir, su amplitud tiende a cero, produciéndose en consecuencia, un flujo continuo de capitales.

e) Momento de valoración:

- Inmediatas: La renta se valora en un momento que está situado entre el origen y el final de la renta. Lo habitual es que ese momento coincida con el origen (valor actual) o con el final (valor final).
- Diferidas: La valoración se realiza en un instante anterior al origen de la renta.
- Anticipadas: La valoración se realiza en un momento posterior al final de la renta.

f) Certeza de los elementos de la renta:
- Ciertas: Cuando tanto los términos de la renta (cuantías y vencimiento) como su duración son conocidas con certeza.
- Aleatorias: Cuando alguno de los anteriores elementos no es conocido con certeza, por depender de fenómenos estocásticos, aunque si está definida su función de distribución de la probabilidad.

8.3 VALOR FINANCIERO DE UNA RENTA

El valor capital o valor financiero de una renta es la suma financiera de sus capitales o términos. Aunque se puede obtener en cualquier momento del tiempo, lo habitual es que el valor financiero se calcule en el origen de la renta, en cuyo caso recibe el nombre de valor actual, o en el final de renta, denominándose al valor financiero de obtenido en ese momento valor final.

Dado que lo normal es que las rentas tengan una duración bastante amplia, se suele utilizar en su valoración la ley de capitalización/descuento compuesta.

En el supuesto de una renta variable, pospagable, temporal e inmediata, el valor actual viene representado por el siguiente gráfico:

El valor actual de la renta se obtiene sumando el valor de cada uno de los términos de la renta en el origen.

$$V_0 = C_1 \cdot (1+i)^{-1} + C_2 \cdot (1+i)^{-2} + \; .... \; + C_n \cdot (1+i)^{-n} = \sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-s}$$

El valor final para el mismo tipo de renta se obtiene de una forma similar a la empleada en el cálculo del valor actual:

Para obtener el valor final se suman los valores de cada uno de los términos en el final de la renta.

$$V_n = C_1 \cdot (1+i)^{n-1} + C_2 \cdot (1+i)^{n-2} + \; .... \; + C_{n-1} \cdot (1+i)^{1} + C_n = \sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-s}$$

8.4 PROPIEDADES DE LAS RENTAS.

Podemos señalar tres propiedades que cumplen las rentas y que son muy útiles de cara a su valoración financiera.

a) El valor financiero es linealmente proporcional a las cuantías.

Si suponemos que la cuantía de los capitales es una combinación de las cuantías de los capitales de otras rentas: $C_s = k' \cdot C'_s + k'' \cdot C''_s$, se verifica que el valor financiero de la renta es una combinación del valor financiero de las otras rentas. Si, por ejemplo, optamos por calcular el valor actual, tenemos:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} (k' \cdot C'_s + k'' \cdot C''_s) \cdot (1+i)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} k' \cdot C'_s \cdot (1+i)^{-s} + \sum_{s=1}^{n} k'' \cdot C''_s \cdot (1+i)^{-s}$$

$$= k' \cdot \sum_{s=1}^{n} \cdot C'_s \cdot (1+i)^{-s} + k'' \cdot \sum_{s=1}^{n} \cdot C''_s \cdot (1+i)^{-s}$$

$$= k' \cdot V'_0 + k'' \cdot V''_0$$

b) Aditividad respecto al tiempo.

El valor financiero de una renta se puede descomponer en la suma de los valores financieros de los tramos en que se pueda descomponer dicha renta. Esta propiedad es especialmente útil cuando se trata de valorar rentas con más de un tipo de interés o cuando tiene distintos tramos en los que las cuantías siguen distintas reglas de formación.

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^{r} C_s \cdot (1+i)^{-s} + \sum_{s=r+1}^{n} C_s \cdot (1+i)^{-s}$$

c) Sustitución de una renta por otra equivalente de menor número de términos.

El caso más frecuente en el que se aplica esta propiedad es el de la renta en la que los periodos de maduración tienen una duración inferior al año (rentas fraccionadas).

9. PRÉSTAMOS

9.1 DEFINICIÓN

Se trata de una operación financiera en la que una de las partes (el prestamista) entrega un capital a la otra parte (el prestatario) que tiene que devolver su equivalente en uno o varios pagos escalonados en el tiempo.

Es una operación compuesta en la que la prestación está formada por un solo capital y la contraprestación está integrada, habitualmente, por varios capitales. El objetivo de la contraprestación es devolver el capital prestado junto con los intereses generados.
En un préstamo el saldo siempre es a favor del prestamista. Esta característica lo diferencia de un crédito, donde es posible que el saldo en un momento dado sea a favor del prestatario.
Al tratarse de una operación que habitualmente se pacta a largo plazo, la ley financiera que se utiliza en su valoración es la capitalización/descuento compuesto.

9.2 VARIABLES SIGNIFICATIVAS DE UN PRÉSTAMO

Como en cualquier operación financiera tiene que verificarse la equivalencia financiera en un momento determinado entre el capital de la prestación, C_0 , y los capitales de la contraprestación, a_1, $a_2, \dots, a_n$. Si consideramos que ese momento es el origen del préstamo y que el tipo de interés es constante a lo largo de toda la duración, la ecuación de equivalencia financiera es la siguiente:

$$C_0 = a_1 \cdot (1+i)^{-1} + a_2 \cdot (1+i)^{-2} + \ \dots. \ + a_n \cdot (1+i)^{-n} = \sum_{r=1}^{n} a_s \cdot (1+i)^{-r}$$

Donde:
C_0 = capital prestado
a_r = Términos amortizativos
i = Tipo de interés
Habitualmente, tanto el capital prestado, el tanto de interés, el número de términos amortizativos y su tipo (constante, en progresión aritmética o geométrica) son datos conocidos y, a partir de ellos, se debe obtener el valor de los términos que amortizan el préstamo. Los términos amortizativos, que tienen por objetivo devolver el capital prestado junto con los intereses, reciben el nombre de anualidades, si la periodicidad con la que abonan es anual, mensualidades si se abonan mensualmente, semestralidades si se pagan con carácter semestral, etc.
El capital que se presta (C_0) lo entrega el prestamista en el momento *0* (origen de la operación). Al final del primer período el prestatario entrega el primer término amortizativo (a_1) que se compone de la cuota de interés (I_1) y de la cuota de amortización (A_1). La cuota de interés recoge los intereses que ha devengado el capital vivo al principio de ese período, mientras que la cuota de amortización es igual a la disminución que experimenta el capital vivo de un período a otro, es decir, la cantidad que se dedica a

disminuir la deuda pendiente. Al final del período 1 y como consecuencia del pago de la cuota de amortización de ese período (A_1), el capital vivo o deuda pendiente ya no es C_0, sino C_1.

En el segundo período el proceso de evolución del préstamo es similar. El capital vivo al principio de ese período (C_1) genera unos intereses (I_2) que junto a la cuota de amortización (A_2) forman el término amortizativo (a_2) que el prestatario abona al prestamista. El capital vivo que queda al final del segundo período (C_2) es el que genera los intereses correspondientes en el tercer período que junto con la cuota de amortización forman el término amortizativo correspondiente.

El proceso continua hasta el último período en el que el capital vivo que queda pendiente al principio de ese período (C_{n-1}) tiene que ser obligatoriamente igual a la cuota de amortización (A_n), ya que, en caso contrario, el capital vivo al final del período (C_n) no podría ser igual a 0.

A la vista del gráfico es relativamente sencillo identificar las variables más significativas de un préstamo y entender las relaciones que hay entre ellas.

Tabla 1

Notación	Variable	Significado	Relaciones
C_0	Capital préstamo	Capital que entrega el prestamista al prestatario en el origen de la operación.	$C_0 = \sum_{r=1}^{n} A_r$
C_s	Capital vivo	Deuda pendiente al final del período s.	$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r$
M_s	Capital amortizado	Deuda amortizada hasta el final del período s.	$M_s = \sum_{r=1}^{s} A_r$ $M_s = C_0 - C_s$
I_s	Cuota de interés	Intereses que devenga el préstamo en el período s.	$I_s = C_{s-1} \cdot i$
A_s	Cuota de amortización	Disminución que experimenta el capital vivo en el período s.	$A_s = C_{s-1} - C_s$
a_s	Término amortizativo	Cantidad que el prestatario entrega al prestamista de forma periódica para amortizar el préstamo.	$a_s = I_s + A_s$

Todas estas variables se suelen presentar en una tabla de doble entrada en la que se recogen los valores que toman a lo largo de la duración del préstamo.

Tabla 2

Período (s)	Término amortizativo (a_s)	Cuota de interés (I_s)	Cuota de amortización (A_s)	Capital vivo (C_s)
0	-	-	-	C_0
1	a_1	$I_1 = C_0 \cdot i$	A_1	$C_1 = C_0 - A_1$
2	a_2	$I_1 = C_0 \cdot i$	A_2	$C_2 = C_1 - A_2$
-	-	-	-	-
s	a_s	$I_s = C_{s-1} \cdot i$	A_s	$C_s = C_{s-1} - A_s$
-	-	-	-	-
n	a_n	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	A_n	$C_n = 0$

En un préstamo, como en cualquier operación financiera, debe verificarse la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación (capital prestado) y la contraprestación (términos amortizativos). Si esa ecuación se plantea en el origen, tenemos:

$$C_0 = a_1 \cdot (1+i)^{-1} + a_2 \cdot (1+i)^{-2} + \ .... \ + a_n \cdot (1+i)^{-n} = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot (1+i)^{-r}$$

Y si se plantea en otro momento del tiempo, obtenemos el capital vivo, que en función del método elegido es igual a:

- Método prospectivo:

$$C_0 = a_{s+1} \cdot (1+i)^{-1} + a_{s+2} \cdot (1+i)^{-2} + \ .... \ + a_n \cdot (1+i)^{-(n-s)}$$
$$= \sum_{r=s+1}^{n} a_r \cdot (1+i)^{-(r-s)}$$

- Método retrospectivo:

$$C_s = C_0 \cdot (1+i)^{-s} - [a_1 \cdot (1+i)^{s-1} + \ldots + a_s] = C_0 \cdot (1+i)^{s} - \sum_{r=1}^{s} a_r \cdot (1+i)^{s-r}$$

- Método recurrente:

$$C_s = C_{s-1} \cdot (1+i) - a_s$$

9.3 VALOR DEL PRÉSTAMO.

Dado que los préstamos son operaciones financieras a largo plazo es habitual que los tipos de interés vigentes en los mercados financieros varíen a lo largo del tiempo. Si en un momento determinado de la vida del préstamo, el prestamista quiere transmitir sus derechos sobre los términos amortizativos a un tercero, tiene que valorarlos al tipo de interés vigente en ese momento en el mercado. El capital que se obtiene de esta forma en un punto intermedio de la vida del préstamo es el valor del préstamo y se obtiene actualizando a ese momento los términos amortizativos que faltan por entregar, utilizando para ello el tipo de interés de mercado (i´).

La diferencia que existe entre el capital vivo y el valor del préstamo en un momento intermedio radica en el tipo de interés que se utiliza para su cálculo. Para obtener el capital vivo se actualizan los términos amortizativos que faltan por entregar con el tipo de interés pactado en el préstamo (i). Sin embargo, para calcular el valor del préstamo se actualizan los términos amortizativos futuros con el tipo de interés de mercado (i´).

$$C_s = a_{s+1} \cdot (1+i)^{-1} + a_{s+2} \cdot (1+i)^{-2} + \ \ldots. \ + a_n \cdot (1+i)^{-(n-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \cdot (1+i)^{-(r-s)}$$

$$V_s = a_{s+1} \cdot (1+i')^{-1} + a_{s+2} \cdot (1+i')^{-2} + \ \ldots. \ + a_n \cdot (1+i')^{-(n-s)} = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \cdot (1+i')^{-(r-s)}$$

9.4 AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO A TRAVÉS DE UN SOLO PAGO.

A este tipo de préstamo se les conoce como préstamo elemental o simple y se caracteriza porque la contraprestación está formada por un solo capital.

A cambio del capital prestado (C_0) en el origen de la operación, el prestatario tiene que entregar en el final el capital C_n o montante generado durante los n períodos de duración del préstamo.

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$$

El capital vivo en un momento intermedio s, es igual a:

- Método prospectivo: $C_s = C_n \cdot (1+i)^{-(n-s)}$
- Método retrospectivo: $C_s = C_0 \cdot (1+i)^s$
- Método recurrente: $C_s = C_{s-1} \cdot (1+i)$

La cantidad que el prestatario tiene que entregar al prestamista en concepto de intereses es la diferencia entre el capital C_n y el capital prestado C_0.

$$I_n = C_n - C_0 = C_0 \cdot (1+i)^n - C_0 = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1]$$

9.5 AMORTIZACIÓN DE UN PRÉSTAMO POR EL MÉTODO FRÁNCES.

9.5.1 DEFINICIÓN

Principalmente se caracteriza porque los términos amortizativos del préstamo y el tipo de interés que se le aplica se mantienen constantes. La fórmula es la siguiente:

$$a = \frac{C_0}{\frac{1-(1+i_k)^{-n\times k}}{i_k}}$$

Donde:

- a = cuantía de los términos amortizativos.
- C_0 = Montante del préstamo.
- i_k = tipo de interés efectivo.
- n = años de la operación de amortización.
- k = número de términos amortizativos que se encuentran en cada año.

Este sistema se utiliza tanto en operaciones de amortización a tipo de interés fijo como en operaciones de interés variable. En operaciones de este segundo tipo, el índice más utilizado es el Euribor en el plazo de un año.

9.5.2 CÁLCULO DE LOS TÉRMINOS AMORTIZATIVOS, CAPITAL VIVO, CUOTAS DE AMORTIZACIÓN Y CAPITAL AMORTIZADO.

Al comienzo de la operación se calcula la cuantía de los términos amortizativos correspondientes al año 1, al tipo de interés correspondiente:

$$a_1 = \frac{C_0}{\frac{1-\left(1+i_{1(k)}\right)^{-n\times k}}{i_{1(k)}}}$$

Una vez transcurridos los k períodos del primer año en la operación, se calcula el capital vivo o capital pendiente de amortizar. Aplicando el método prospectivo, nos quedaría:

$$C_k = a_1 \times \frac{1-\left(1+i_{1(k)}\right)^{(n-1)\times k}}{i_{1(k)}}$$

Al comienzo del periodo del año 2, se determina la cuantía de los términos amortizativos correspondientes a a_2. La cuantía de la prestación es igual al capital vivo en ese momento y la duración es igual al número de años menos uno por k períodos, al tipo de interés correspondiente:

$$a_2 = \frac{C_k}{\frac{1-\left(1+i_{2(k)}\right)^{-(n-1)\times k}}{i_{2(k)}}}$$

Al igual que hemos hecho anteriormente, se calcula el capital vivo o pendiente de amortizar en ese momento:

$$C_{2k} = a_2 \times \frac{1-\left(1+i_{2(k)}\right)^{(n-2)\times k}}{i_{2(k)}}$$

El apartado anterior se repite de forma sucesiva hasta el final de la operación. Mientras tanto, las diferentes magnitudes de la operación se determinan de la siguiente forma:

- La cuota de interés de cada uno de los períodos (I_s) se obtiene multiplicando el capital vivo final del período anterior por el tipo de interés efectivo correspondiente:

$$I_s = C_{s-1} \times i_s$$

- La cuota de amortización de cada período (A_s) se calcula con la diferencia entre el término amortizativo y la cuota de interés de dicho período:

$$A_s = a_s - I_s$$

- El capital vivo al final de cada período (C_s) se obtiene con la diferencia entre la cuota de amortizacion del período y la del capital vivo al final del período anterior:

$$C_s = C_{s-1} - A_s$$

- El capital amortizado al final de cada período (M_s) se calcula sumando la cuota de amortización del período y el capital amortizado al final del periodo anterior:

$$M_s = M_{s-1} + A_s$$

9.5.3 EJEMPLO 2

Préstamo de 100.000€ a amortizar en 2 años, con pagos cuatrimestrales constantes y tipo de interés revisable anualmente. El tipo de interés del primer año es del 5% nominal.

$$i_{1(3)} = \frac{j_{1(3)}}{3} = \frac{0{,}05}{3} = 0{,}01667$$

La cuantía de las cuatrimestralidades correspondientes al primer año será:

$$a_1 = \frac{100.000}{\frac{1-1{,}01667^{-6}}{0{,}01667}} = 17.652{,}4782$$

El capital vivo al final del primer año será:

$$C_3 = 17.652{,}4782 \times \frac{1-1{,}01667^{-3}}{0{,}01667} = 51.239{,}68941$$

Terminado el primer año, el tipo de interés aplicable al segundo año será del 7% nominal.

$$i_{2(3)} = \frac{j_{2(3)}}{3} = \frac{0{,}07}{3} = 0{,}02333$$

De este modo, la cuantía de las cuatrimestralidades correspondientes al segundo año será de:

$$a_2 = \frac{51.239{,}68941}{\frac{1 - 1{,}02333^{-3}}{0{,}02333}} = 17.882{,}970$$

El capital vivo al final del segundo año será:

$$C_6 = 17.882{,}970 \times \frac{1 - 1{,}02333^{0}}{0{,}02333} = 0$$

El cuadro de amortización financiera es el siguiente:

Año	Cuatrimestre	$i_{s(3)}$	a_s	I_s	A_s	C_s	M_s
Inicio	-	-	-	-	-	100.000	-
1	1	0,01667	17.652,4782	1.667	15.985,4782	84.014,5218	15.985,4782
	2	0,01667	17.652,4782	1.400,5220	16.251,9561	67.762,5657	32.237,4343
	3	0,01667	17.652,4782	1.129,6020	16.522,8762	51.239,6895	48.760,3105
2	1	0,02333	17.882,970	1.195,4220	16.687,548	34.552,1415	65.447,8585
	2	0,02333	17.882,970	806,1014	17.076,8685	17.475,2730	82.524,727
	3	0,02333	17.882,970	407,6981	17.475,2730	0	100.000

10. CÁLCULO FINANCIERO EN MATHEMATICA: PRINCIPALES INSTRUCCIONES.

TimeValue:

- Se utiliza para realizar cálculos en operaciones de interés compuesto.
- TimeValue[*a*, *i*, *t*] calcula el valor futuro o acumulado de un capital *a* después de *t* periodos de capitalización a un tipo de interés del periodo *i*.
- TimeValue[*a*, *i*, -*t*] calcula el valor presente o descontado para t periodos de una cantidad *a*, para un tipo de interés del periodo i.
- TimeValue[*s*, *i*, {*t*,t_1}] devuelve el valor acumulado o descontado desde el momento t_1 hasta el momento *t*.
- La variable *t* puede ser introducida por fechas de la forma {año, mes, día} en valores numéricos.
- TimeValue[s, EffectiveInterest[r,1/n], t] utiliza una tasa de interés nominal *r*, compuesta *n* veces por 1 periodo unitario. El valor *t* se considerará en términos

anuales. Si los periodos *t* se especifican como fechas concretas, se tratarían también como períodos de año transcurridos.

EffectiveInterest[*r*,*q*]:

- EffectiveInterest[*r*,*q*] calcula el interés efectivo correspondiente al interés nominal *r*, compuesto por periodos o fracciones de año *q*.
- EffectiveInterest devuelve una expresión adecuada para el uso en TimeValue.
- Las expresiones se pueden resolver para tasas nominales, periodos de capitalización y parámetros de tiempo.

Annuity[*p*,*t*]:

- Se trata de una expresión que se utiliza en el cálculo financiero de rentas y préstamos.
- Annuity[*p*,*t*] representa una serie de pagos periódicos fijos, *p*, realizados durante *t* años.
- Annuity[*p*, *t*, *q*] representa una serie de pagos anuales fijos, *p*, con duración de t años, realizándose los pagos en periodos o fracciones de años *q*.
- Annuity[{$p_{inicial}$, p_{final}}, *t*, *q*] representa una anualidad con los pagos iniciales $p_{inicial}$ y pagos finales p_{final} específicos.
- TimeValue[Annuity[...], interés, t] calcula el valor temporal de una anualidad como un pago único equivalente el momento de tiempo t.

AnnuityDue[*p*,*t*]:

- Se utiliza para el cálculo de anualidades anticipadas.
- AnnuityDue[*p*, *t*] representa una anualidad adeudada o anticipada de pagos fijos, *p*, realizados durante *t* años.
- AnnuityDue[*p*, *t*, *q*] representa una serie de pagos anticipados periódicos fijos, *p*, con duración de *t* años, realizándose los pagos en periodos o fracciones de año *q*.
- AnnuityDue[{$p_{inicial}$, p_{final}}, *t*, *q*] representa una serie de pagos de cantidad $p_{inicial}$ anticipados anuales fijos con duración de *t* años, realizándose los pagos en periodos o fracciones de año *q* y un pago final $p_{final.}$
- Las funciones de AnnuityDue son similares a las de Annuity con la excepción de que los pagos ocurren al comienzo de los períodos en lugar de al final.

- AnnuityDue se usa con TimeValue de la misma manera que Annuity.

Cashflow:

- Cashflow[{c_0, c_1, ..., c_n}] representa una serie de flujos de efectivo producidos sucesivamente en intervalos de tiempo unitario.
- Cashflow[{c_0, c_1, ..., c_n},*q*] representa una serie de flujos de efectivo producidos en intervalos de tiempo fraccionario *q* de año.
- Cashflow[{{$periodo_1$, c_1},{$periodo_2$, c_2}, ..., {$periodo_n$, c_n}, }] representa una serie de flujos de efectivo c_1, ..., c_n producidos, respectivamente, en periodos de tiempo determinados $periodo_1$, ..., $periodo_n$.
- TimeValue[Cashflow[…], *i*, *t*] calcula el valor temporal de un flujo de caja introduciendo cantidades diferentes para cada período. Incluye flujos de efectivo, tasa de interés, *i*, y tiempo o momento de valoración, *t*.

Otras instrucciones generales útiles para el cálculo financiero:

- Solve[] se utiliza para resolver una ecuación con una variable determinada.
- N[Solve[]] se emplea para resolver numéricamente una ecuación con una variable determinada.
- ListPlot[] se utiliza para generar un gráfico de puntos, especificando sus coordenadas, en un plano.
- DataRange->{} se emplea para especificar el rango de la información del gráfico.
- PaddedForm[{n,f}] se utiliza para que las salidas tengan un formato determinado. (espacios entre los dígitos, números de decimales)
- TableForm[] permite expresar los datos ordenados en una tabla e introducir etiquetas en dicha tabla.
- Clear[] se utiliza para limpiar la memoria.

11. EJEMPLOS MATHEMATICA

1. Calcular el interés simple de un préstamo de 3.000€ a 10 años con una tasa del 5% anual:

```
In[ ]:= Principal = 3000;
        tasa = 0.05;
        tiempo = 10;
        Interes = Principal * tasa * tiempo

Out[ ]= 1500.
```

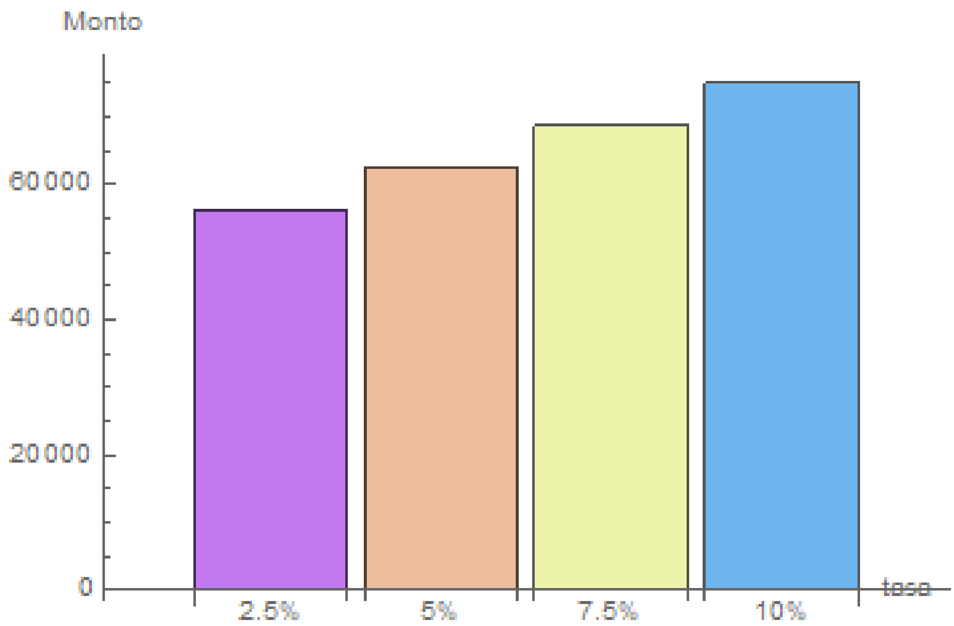
2. Calcular el monto final del ejercicio anterior:

```
In[ ]:= Monto = Principal * (1 + tasa * tiempo)

Out[ ]= 4500.

        Monto == Principal + Interes
        (*Comprobamos que el monto es la suma
         del capital inicial más los intereses generados*)

Out[ ]= True
```

3. Calcular el monto cuando el principal es de 50.000€ a 5 años con diferentes tasas anuales: 2.5%, 5%, 7.5% y 10 %. Representar gráficamente los resultados:

```
In[ ]:= Principal = 50000;
        tasa = {0.025, 0.05, 0.075, 0.10};
        tiempo = 5;
        Monto = Principal * (1 + tasa * tiempo)

Out[ ]= {56250., 62500., 68750., 75000.}

BarChart[{56250, 62500, 68750, 75000},
 ChartLabels → {"2.5%", "5%", "7.5%", "10%"},
 AxesLabel → {HoldForm[tasa],
   HoldForm[Monto]},
 ChartStyle → "Pastel"]
```

Out[•]=



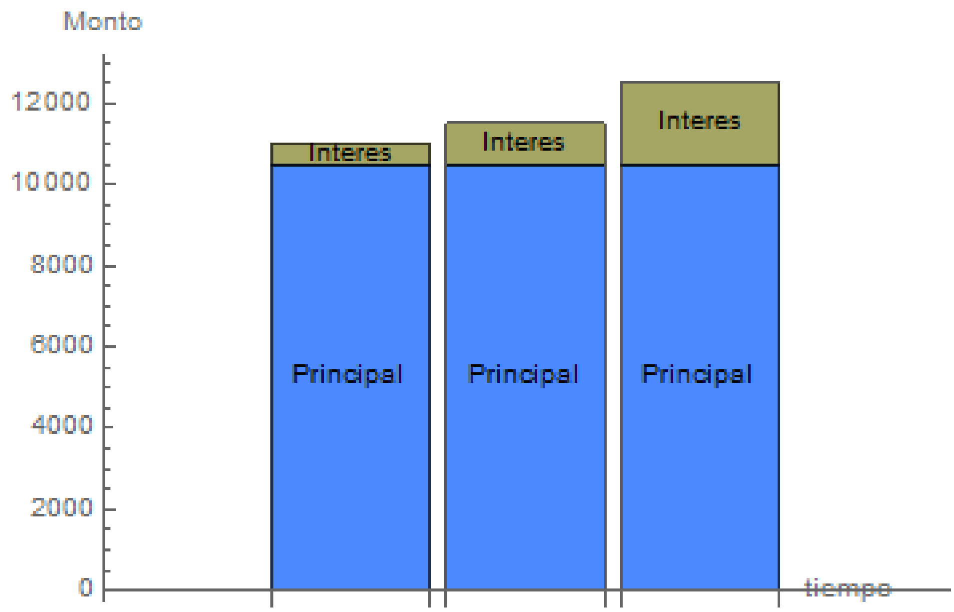
4. Calcular el número de años que se necesitan para que una inversión de 10.500€ a una tasa del 6% anual generen los siguientes intereses: 500€, 1000€, 2.000€. Realizar una gráfica con los resultados obtenidos (diferenciando el principal y el interés).

In[•]:=
```
Interes = {500, 1000, 2000};
tasa = 0.06;
Principal = 10500;
tiempo = Interes / (Principal * tasa)
```

Out[•]=
```
{0.793651, 1.5873, 3.1746}
```

```
BarChart[{{10500, 500}, {10500, 1000}, {10500, 2000}},
 ChartLabels → {"Principal", "Interes"},
 ChartLayout → "Stacked",
 ChartStyle → 66,
 AxesLabel → {HoldForm[tiempo], HoldForm[Monto]}]
```

Out[ ]=



5. Calcular la tasa que generó un interés de 600€ de un préstamo de 1650€ por 6 años y medio. Expresar el resultado en porcentaje.

```
In[ ]:= Interes = 600;
        Principal = 1650;
        tiempo = 6.5;
```

$$\text{tasa} = \frac{\text{Interes}}{\text{Principal} * \text{tiempo}} * 100$$

```
Out[ ]= 5.59441
```

6. Calcular el valor efectivo de un préstamo solicitado 7.500€ a 20 meses con una tasa del 3.5% anual. Calcular la tasa de rendimiento.

```
In[ ]:= tasad = 0.035;
        Monto = 7500;
        tiempo = 20 / 12;
        Descuento = Monto * tasad * tiempo;
        ValorEfectivo = Monto - Descuento
```

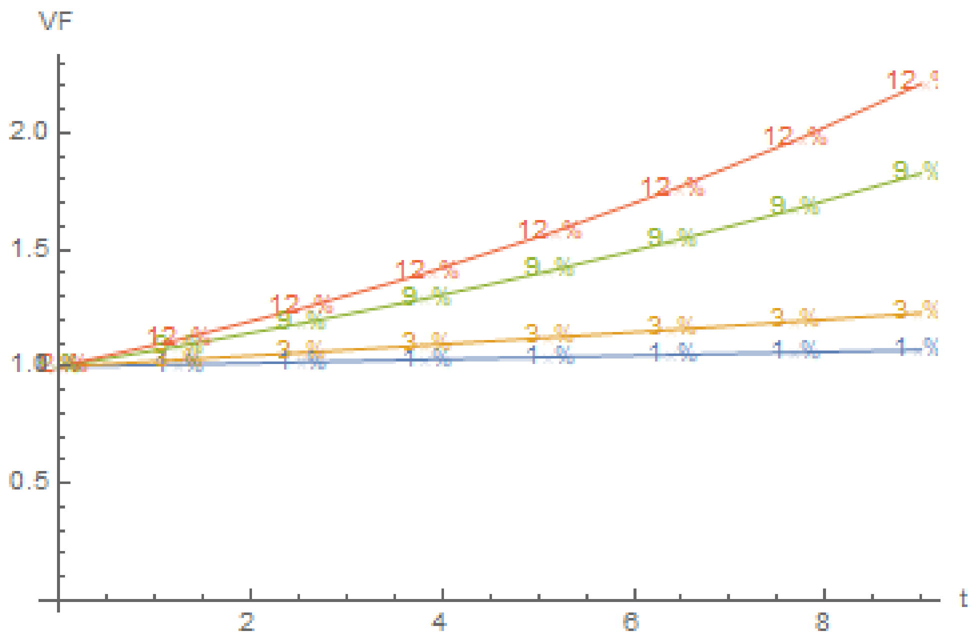
$$\text{TasaR} = \frac{\text{Monto} - \text{ValorEfectivo}}{\text{ValorEfectivo} * \text{tiempo}}$$

```
Out[ ]= 7062.5

Out[ ]= 0.0371681
```

7. Calcular el valor futuro de 2€ después de 7 años con las siguientes tasas anuales: 1%, 3%, 9%, 12%. Generar el cálculo para cada año y expresarlo gráficamente.

```
In[ ]:= VP = 1;
        i = 0.01;
        t = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
        VF = VP * (1 + i)^t

Out[ ]= {1., 1.01, 1.0201, 1.0303, 1.0406, 1.05101, 1.06152, 1.07214}

In[ ]:= VP = 1;
        i = 0.03;
        t = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
        VF = VP * (1 + i)^t

Out[ ]= {1., 1.03, 1.0609, 1.09273, 1.12551, 1.15927, 1.19405, 1.22987}

In[ ]:= VP = 1;
        i = 0.09;
        t = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
        VF = VP * (1 + i)^t

Out[ ]= {1., 1.09, 1.1881, 1.29503, 1.41158, 1.53862, 1.6771, 1.82804}

In[ ]:= VP = 1;
        i = 0.12;
        t = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
        VF = VP * (1 + i)^t

Out[ ]= {1., 1.12, 1.2544, 1.40493, 1.57352, 1.76234, 1.97382, 2.21068}

ListPlot[{{1., 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.04060401, 1.0510100501,
   1.061520150601, 1.0721353521070098}, {1., 1.03, 1.0609, 1.092727,
   1.12550881, 1.1592740742999998, 1.194052296529, 1.22987386542487},
  {1., 1.09, 1.1881000000000002, 1.2950290000000002, 1.4115816100000003,
   1.5386239549000005, 1.6771001108410006, 1.8280391208166908},
  {1., 1.12, 1.2544000000000002, 1.4049280000000004, 1.5735193600000004,
   1.7623416832000005, 1.973822685184001, 2.2106814074060814}},
 DataRange -> {0, 9}, PlotMarkers -> {"1%", "3%", "9%", "12%"},
 AxesLabel -> {"t", "VF"}, Joined -> True]
```

Out[ ]=



8. Calcular el valor futuro de una inversión de 7.500€ con una tasa del 5.6% capitalizable por semestres por 5 años.

In[ ]:=
```
VP = 7500;
i = 0.056;
t = 5;
n = 2;
k = n (t);
```
$$VF = VP \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{k}$$

Out[ ]= 9885.36

9. Calcular el valor presente de una inversión de 5.000€ a 4 años con una tasa del 7% anual.

In[ ]:=
```
VF = 5000;
i = 0.07;
t = 4;
```
$$\text{Solve}\left[VF == VP9\,(1 + i)^{t},\ VP9\right]$$

Out[ ]= {{VP9 → 3814.48}}

In[ ]:= `TimeValue[5000, 0.07, -4]`

Out[ ]= 3814.48

10. Calcular la tasa anual con un valor presente de 3788.08€ a 4 años con un valor futuro de 5000€.

```
In[•]:= VF = 5000;
        VP = 3788.08;
        t = 4;
        Solve[VF == VP (1 + it)^t, it][[4]]
Out[•]= {it → 0.0718591}
In[•]:= FindRoot[TimeValue[3788.08, r, 4] == 5000, {r, 4}]
Out[•]= {r → 0.0718591}
```

11. Calcular el tiempo requerido con un valor presente de 3000€ y una tasa de 5% anual obtenga un valor futuro de 4500€.

```
In[•]:= VF = 4500;
        VP = 3000;
        i = 0.05;
        Solve[VF == VP (1 + i) ^tmp, tmp, InverseFunctions -> True]
Out[•]= {{tmp → 8.31039}}

In[•]:= Solve[TimeValue[3000, 0.05, n1] == 4500, n1]
Out[•]= {{n1 → 8.31039}}
```

12. Utilizando "EffectiveInterest", calcular las tasas efectivas correspondientes a las tasas nominales compuestas mensualmente: 2.5%, 5%, 10%, 15%.

```
In[•]:= EffectiveInterest[{0.025, 0.05, 0.10, 0.15}, 1 / 12]
Out[•]= {0.0252885, 0.0511619, 0.104713, 0.160755}
```

13. Determinar el monto de anualidad vencida con una renta de 2500€ a una tasa del 6% anual durante 8 años. Realizar una tabla dividiendo los resultados por años.

```
In[ ]:= R = 2500;
        i = 0.06;
        t = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
        N[M = R * (((1 + i)^t - 1) / i)];
        tabla = Table[{t, M}, {1}];
        TableForm[tabla, TableHeadings → {None, {"Años", "Monto"}}]
```

Años	Monto
1	2500.
2	5150.
3	7959.
4	10 936.5
5	14 092.7
6	17 438.3
7	20 984.6
8	24 743.7

14. Calcular el monto de la anualidad vencida con una renta de 1500€ a una tasa de interés del 3% anual convertible mensualmente y semestralmente durante 7 años. Expresar los resultados en una tabla.

```
R = 1500;
i = 0.03;
a = PaddedForm[ R (((1 + i)^t1 - 1) / i), {4, 1}];
b = PaddedForm[R (((1 + i / 12)^(12 t1) - 1) / (i / 12)), {4, 1}];
c = PaddedForm[R (((1 + i / 2)^(2 t1) - 1) / (i / 2)), {4, 1}];
tp = PaddedForm[t1, 1];
tabla = Table[{tp, a, b, c}, {t1, 1, 9}];
Style[TableForm[tabla,
  TableHeadings → {None, {"Años", "Anual", "Mensual", "Semestral"}},
  TableSpacing → {3}], {Orange}]
```

Años	Anual	Mensual	Semestral
1	1500.0	18250.0	3022.0
2	3045.0	37050.0	6136.0
3	4636.0	56430.0	9344.0
4	6275.0	76400.0	12650.0
5	7964.0	96970.0	16050.0
6	9703.0	118200.0	19560.0
7	11490.0	140000.0	23180.0
8	13340.0	162500.0	26900.0
9	15240.0	185700.0	30730.0

15. Determinar el valor actual de una anualidad con una renta 2.500€ a una tasa del 5% convertible trimestralmente durante 12 años.

```
In[ ]:= R = 2500;
        i = 0.05;
        n = 4;
        t = 12;
        k = n * t;
        N[C15 == R ((1 - (1 + i / n)^-k) / (i / n))]

Out[ ]= C15 == 89 828.7

        TimeValue[Annuity[2500, 48], 0.05 / 4, 0]
        (*Comprobamos como la orden TimeValue conectada a la expresión
         Annuity realiza automáticamente esta operación de valoración*)

Out[ ]= 89 828.7
```

16. Calcular el monto de la anualidad anticipada con una renta de 800€, una tasa del 4.5% convertible mensualmente durante 11 años.

```
In[ ]:= R = 800;
        i = 0.045;
        t = 11;
        n = 2;
        k = n * t;
        N[Monto16 == R * (1 + i/n) * (((1 + i/n)^k - 1) / (i/n))]

Out[ ]= Monto16 == 22 959.3
```

```
TimeValue[AnnuityDue[800, 22], 0.045 / 2, 22]
(*Comprobamos como la orden TimeValue con la expresión
 AnnuityDue para definir la renta realiza automáticamente
 esta operación de valoración*)
```

```
Out[ ]= 22959.3
```

17. Determinar el VA de la anualidad anticipada cuando la renta es de 3.000€ con una tasa del 4% convertible trimestralmente durante 7 años.

```
In[ ]:= R = 3000;
        i = 0.04;
        t = 7;
        n = 4;
        k = n (t);
        N[C17 == R (1 + i / n) ((1 - ((1 + i / n)^-k)) / (i / n))]
```

```
Out[ ]= C17 == 73678.8
```

```
TimeValue[AnnuityDue[3000, 28], 0.04 / 4, 0]
(*Comprobamos como la orden TimeValue con la expresión
  AnnuityDue para definir la renta realiza automáticamente
  esta operación de valoración*)
```

```
Out[ ]= 73678.8
```

18. Determinar el valor actual neto que tiene una inversión inicial de 12.000€ y que produce los distintos flujos de efectivo siguientes: 7.500, 6.525, 5.750, 4.500, 3800. La tasa es del 15% anual.

```
In[ ]:= TimeValue[Cashflow[{-12000, 7500, 6525, 5750, 4500, 3800}], 0.15, 0]
```

```
Out[ ]= 7698.46
```

Al ser el resultado > 0, se dice que la inversión es rentable.

12. CONCLUSIONES

Mi trabajo de fin de grado está relacionado con el estudio del cálculo financiero, un análisis de las utilidades que Mathematica proporciona para realizarlo, una propuesta con ejemplos de aplicación, así como las gráficas que se pueden generar utilizando dicho software matemático.

Se ha puesto de manifiesto, después de hacer un estudio conciso y riguroso de los elementos básicos de las Matemáticas Financieras como son las leyes de capitalización y descuento, y las rentas financieras, la importancia de su formulación matemática de forma precisa para aportar objetividad, claridad y utilidad para su aplicación en la práctica.

Esta formulación matemática se ha visto enriquecida en este trabajo con la utilización de las herramientas que el software Mathematica nos proporciona. La aportación que se ha buscado con su utilización ha sido en dos sentidos: por un lado, para representar gráficamente algunos procesos y formulaciones de las Matemáticas Financieras y, por otro, mostrar y aplicar las instrucciones propias de la Matemática Financiera que Mathematica incluye.

Con los estudios gráficos que se han realizado se consigue clarificar y ayudar a comprender mejor los conceptos, procedimientos y funciones financieras. Con el análisis de las instrucciones y ejemplos de aplicación propuestos se aportan herramientas de cálculo muy potentes, intuitivas y fáciles de utilizar en la aplicación de los procedimientos de las Matemáticas Financieras que, en muchas ocasiones, requieren de cálculos complejos.

En este trabajo se ha aportado un estudio de las utilidades financieras básicas que aporta Mathematica, pero las herramientas, bases de datos y utilidades financieras que incluye este software abren un campo mucho más extenso para su estudio y análisis de sus aplicaciones.

La documentación bibliográfica esencial la he encontrado en libros disponibles en la Universidad de Jaén, en manuales de Mathematica y el soporte online que proporciona Wolfram. Quiero destacar la dificultad para encontrar información sólida y bien estructurada de la temática que se aborda en este trabajo.

Ante la falta de bibliografía que aúne el análisis financiero con su proyección práctica utilizando las herramientas de Mathematica, considero y espero que este trabajo aporte una nueva perspectiva estudio, aplicaciones y gráficas útiles para avanzar en la comprensión de la materia y en la ejecución práctica de las herramientas de matemáticas financieras.

13. BIBLIOGRAFÍA

Cruz, S., & Valls, M. C. (2008). *Introducción a las Matemáticas Financieras* (2.ª ed.). Madrid: Pirámide.

Don, Eugene, (2001). *Schaum´s Outline of Theory and Problems of Mathematica*. McGraw-Hill.

Fuente Sánchez, D., & Pra Martos, I. (2011), *Valoración de las operaciones financieras.* Madrid: Editorial Universitaria Ramón Areces.

Gil Peláez, L., (1993), *Matemáticas de las operaciones financieras.* AC, Madrid

Partal Ureña, A., Moreno Bonilla, F., Cano Rodríguez, M., & Gómez Fernández-Aguado, P. (2011), *Introducción a las finanzas empresariales* (3ª ed.). Madrid: Pirámide.

Soporte Wolfram Computation Meets Knowledge: https://support.wolfram.com/es/

Vidaurri, Héctor, M. (2008). *Matemáticas Financieras*. Ed. 4ª, Cengage Learning.

Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing: http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-8/built-in-financial-computations/